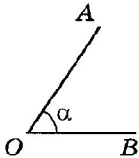
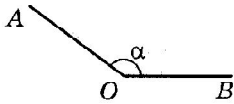
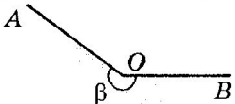
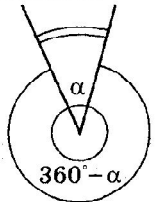
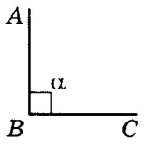
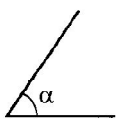
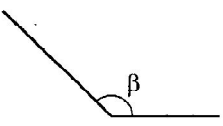
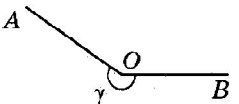
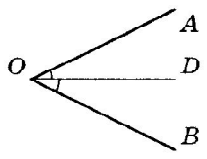
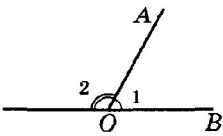
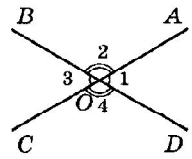


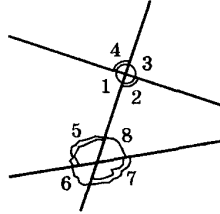
Опорний конспект лекції

Тема. Кути. Прямі на площині. Коло.

1. Кути.

КУТИ				
ПОНЯТТЯ КУТА				
КУТ ЯК «КАРКАСНА» ФІГУРА				
	$\angle AOB = \alpha$ ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$)	<i>Кут — це фігура, що складається з точки — вершини кута — і двох променів, які виходять із цієї точки, сторін кута.</i>		
ПЛОСКИЙ КУТ				
<i>Кут — частина площини, обмежена двома променями зі спільним початком.</i>				
	$\angle AOB = \alpha$ ($0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$)		$\angle AOB = \beta$ ($0^\circ \leq \beta \leq 360^\circ$)	
ВИДИ КУТІВ				
ПРЯМИЙ	ГОСТРИЙ	ТУПИЙ	РОЗГОРНУТИЙ	БІЛЬШИЙ ЗА РОЗГОРНУТИЙ
 $\angle ABC = 90^\circ$	 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$	 $90^\circ < \beta < 180^\circ$	Сторони розгорнутого кута — доповняльні промені.  $\angle AOB = 180^\circ$	 $180^\circ < \gamma \leq 360^\circ$
БІСЕКТРИСА КУТА				
		<i>Бісектриса кута — це промінь, що виходить із вершини кута, лежить у його внутрішній області й ділить кут на два рівні кути. Промінь OD — бісектриса кута AOB. $\angle AOD = \angle BOD$</i>		
СУМІЖНІ ТА ВЕРТИКАЛЬНІ КУТИ				
(розглянуто кути, менші за розгорнутий кут)				
СУМІЖНІ КУТИ		ВЕРТИКАЛЬНІ КУТИ		
 $\angle 1$ і $\angle 2$ — суміжні $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ <i>Сума суміжних кутів дорівнює 180°.</i>		 $\angle 1$ і $\angle 3$ — вертикальні $\angle 2$ і $\angle 4$ — вертикальні $\angle 1 = \angle 3$; $\angle 2 = \angle 4$ <i>Вертикальні кути рівні.</i>		

КУТИ ПРИ ПЕРЕТИНІ ДВОХ ПРЯМИХ СІЧНОЮ



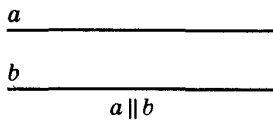
$\angle 1$ і $\angle 5$,
 $\angle 2$ і $\angle 8$ — внутрішні односторонні кути

$\angle 1$ і $\angle 8$,
 $\angle 2$ і $\angle 5$ — внутрішні різносторонні кути

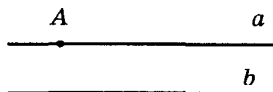
$\angle 4$ і $\angle 5$,
 $\angle 3$ і $\angle 8$ — відповідні кути
 $\angle 1$ і $\angle 6$,
 $\angle 2$ і $\angle 7$

ПАРАЛЕЛЬНІ ТА ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІ ПРЯМІ

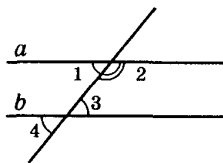
ПАРАЛЕЛЬНІ ПРЯМІ



Дві прямі називають *паралельними*, якщо вони лежать в одній площині й не перетинаються.



Через точку поза прямою можна провести єдину пряму, паралельну даній.

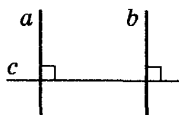


ОЗНАКИ ПАРАЛЕЛЬНОСТІ

Якщо $\angle 1 = \angle 3$ (внутрішні різносторонні кути рівні), або $\angle 1 = \angle 4$ (відповідні кути рівні), або $\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$ (сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°), то $a \parallel b$.

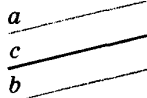
ВЛАСТИВОСТІ

Якщо $a \parallel b$,
то $\angle 1 = \angle 3$,
 $\angle 1 = \angle 4$,
 $\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$.



Якщо $a \perp c$, $b \perp c$
то $a \parallel b$.

Якщо $a \parallel b$, $c \perp a$
то $c \perp b$.

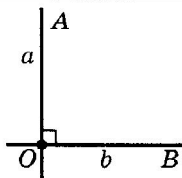


Якщо $a \parallel b$, $b \parallel c$
то $a \parallel c$.

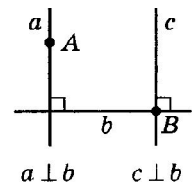
ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІ ПРЯМІ

Дві прямі називають *перпендикулярними*, якщо вони перетинаються під прямим кутом:

$$a \perp b \Leftrightarrow \angle AOB = 90^\circ.$$

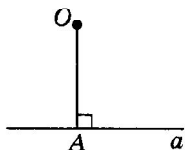


Через задану точку можна провести єдину пряму, перпендикулярну до даної.



$a \perp b$ $c \perp b$

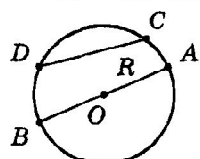
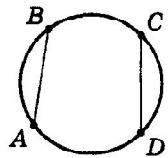
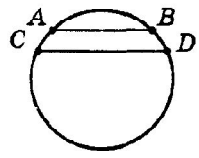
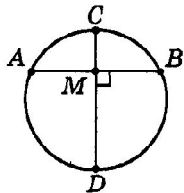
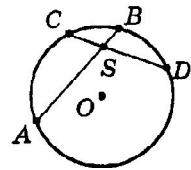
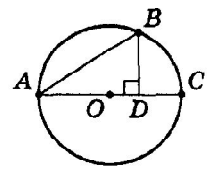
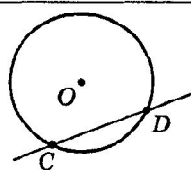
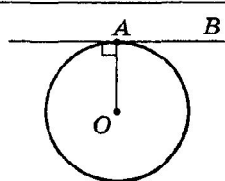
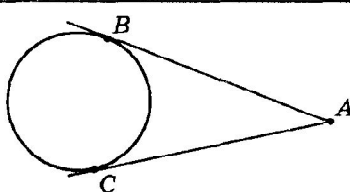
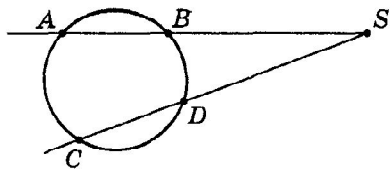
ПЕРПЕНДИКУЛЯР ДО ПРЯМОЇ

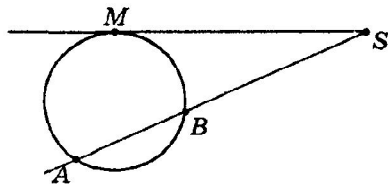


Відрізок OA — перпендикуляр, проведений із точки O до прямої a,
точка A — *основа перпендикуляра*
OA — відстань від точки O до прямої a.

Перпендикуляр — найкоротша відстань від заданої точки до точок заданої прямої.

Коло, хорди, дуги, дотичні й січні. Кути в колі

КОЛО, ХОРДИ, ДУГИ, ДОТИЧНІ Й СІЧНІ			
	Коло — це фігура, що складається з усіх точок площини, рівновіддалених від даної точки (центра). O — центр кола; OA — радіус; AB — діаметр; CD — хорда (відрізок, що сполучає дві точки кола). <i>Найбільшою хордою є діаметр.</i>		
ВЛАСТИВОСТІ ДУГ І ХОРД			
	$\cup AB = \cup CD \Leftrightarrow AB = CD$ Рівні дуги стягують рівні хорди (і навпаки).		$AB \parallel CD \Leftrightarrow \cup AC = \cup BD$ Паралельні хорди відтинають на колі рівні дуги.
	$CD \perp AB \Leftrightarrow$ $AM = MB$ $\cup AC = \cup CB$ $\cup AD = \cup DB$		$AS \cdot SB = CS \cdot SD$ S — точка перетину хорд AB і CD
	Якщо AB — хорда, AC — діаметр і $BD \perp AC$, то $AB^2 = AC \cdot AD$, $BD^2 = AD \cdot DC$.		
ВЛАСТИВОСТІ ДОТИЧНИХ І СІЧНИХ			
	CD — січна — пряма, що має з колом дві спільні точки.		
	AB — дотична — пряма, що має з колом лише одну спільну точку. A — точка дотику.		
	$AB = AC$ AB і AC — дотичні		
	$SA \cdot SB = SC \cdot SD$ SA і SC — січні		

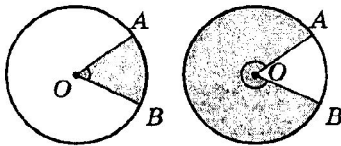


$$SA \cdot SB = SM^2$$

SM — дотична;
 M — точка дотику;
 SA — січна

КУТИ В КОЛІ

ЦЕНТРАЛЬНИЙ КУТ

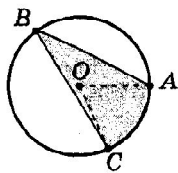


$\angle AOB$ — центральний кут (вершина центрального кута збігається з центром кола)

$$\angle AOB = \cup AB$$

Центральний кут вимірюють дугою, на яку він спирається.

ВПИСАНИЙ КУТ

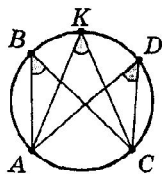


$\angle ABC$ — вписаний кут (вершина вписаного кута лежить на колі, а сторони перетинають коло)

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC = \frac{1}{2} \angle AOC$$

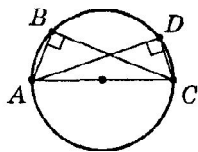
Вписаний кут вимірюють половиною дуги, на яку він спирається, і дорівнює половині центрального кута, що спирається на ту саму дугу.

ВЛАСТИВОСТІ ВПИСАНИХ КУТІВ



$$\angle ABC = \angle AKC = \angle ADC$$

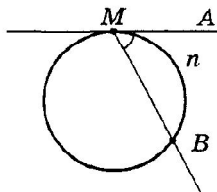
Вписані кути, які спираються на одну і ту саму дугу, рівні.



$$\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$$

Вписаний кут, що спирається на діаметр, дорівнює 90° .

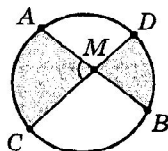
КУТ МІЖ ДОТИЧНОЮ І СІЧНОЮ



MA — дотична; MB — січна

$$\angle AMB = \frac{1}{2} \cup MnB$$

ВПИСАНИЙ КУТ

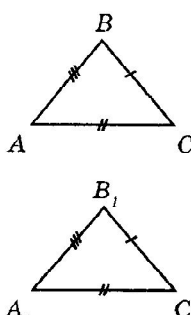
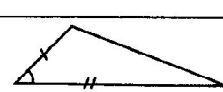
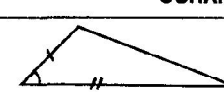
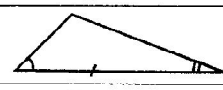
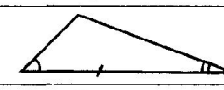
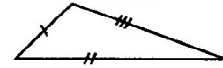
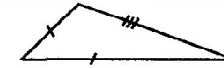
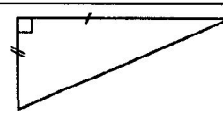
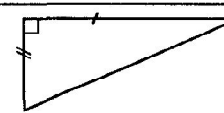
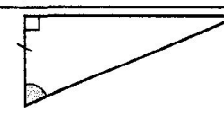
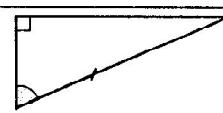
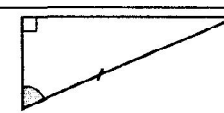
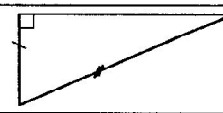
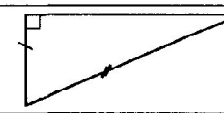
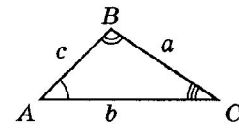
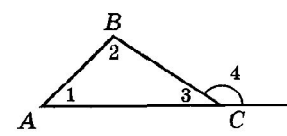


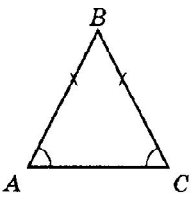
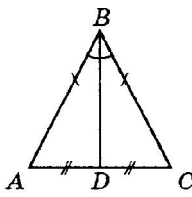
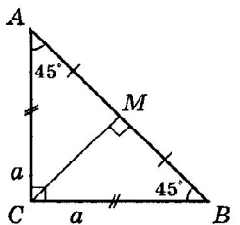
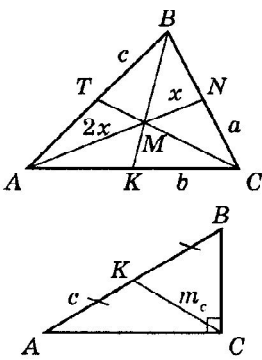
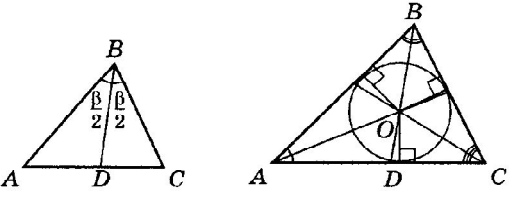
Хорди AB і CD перетинаються в точці M :

$$\angle AMC = \frac{1}{2} (\cup AC + \cup DB)$$

Опорний конспект лекції

Тема. Трикутники.

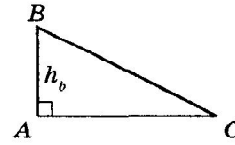
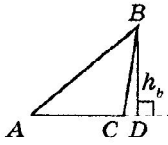
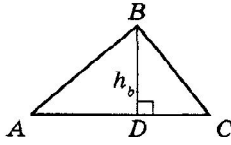
ТРИКУТНИКИ		
РІВНІСТЬ ТРИКУТНИКІВ		
	Дві фігури називають рівними, якщо вони рухом переводяться одна в одну. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ $\Leftrightarrow$ $\begin{aligned} AB &= A_1B_1 & \angle A &= \angle A_1 \\ AC &= A_1C_1 & \angle B &= \angle B_1 \\ BC &= B_1C_1 & \angle C &= \angle C_1 \end{aligned}$	
ОЗНАКИ РІВНОСТІ ТРИКУТНИКІВ		
		1. За двома сторонами і кутом між ними.
		2. За стороною і двома прилеглими до неї кутами.
		3. За трьома сторонами.
ОЗНАКИ РІВНОСТІ ПРЯМОКУТНИХ ТРИКУТНИКІВ		
		1. За двома катетами.
		2. За катетом і гострим кутом.
		3. За гіпотенузою і гострим кутом.
		4. За гіпотенузою і катетом.
ВЛАСТИВОСТІ СТОРІН ТА КУТІВ ТРИКУТНИКІВ		
$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ Сума кутів трикутника дорівнює 180°. 	$ b - c < a < b + c$ нерівність трикутника	Зовнішній кут трикутника  $\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$ $\angle 4 > \angle 1, \angle 4 > \angle 2$

РІВНОБЕДРЕНИЙ ТРИКУТНИК		
		Трикутник називають рівнобедреним, якщо у нього дві сторони рівні. ΔABC — рівнобедрений ($AB = BC$) AC — основа AB і BC — бічні сторони
ВЛАСТИВОСТІ		ОЗНАКИ
1. Якщо в ΔABC $AB = BC$, то $\angle A = \angle C$ (кути при основі рівні).		1. Якщо в ΔABC $\angle A = \angle C$, то $AB = BC$
2. Якщо ΔABC — рівнобедрений і BD — медіана, то BD — висота й бісектриса У рівнобедреному трикутнику висота, медіана і бісектриса, проведені до основи, збігаються .		2. Якщо в трикутнику збігаються: а) висота й медіана, або б) висота й бісектриса, або в) медіана й бісектриса, то трикутник — рівнобедрений.
РІВНОБЕДРЕНИЙ ПРЯМОКУТНИЙ ТРИКУТНИК		
		$\angle C = 90^\circ$, $AC = CB$, $\angle A = \angle B = 45^\circ$. $CM \perp AB$, тоді $CM = AM = MB$. $AC = CB = a$, тоді $AB = a\sqrt{2}$.
ВИСОТА, МЕДІАНА, БІСЕКТРИСА ТА СЕРЕДНЯ ЛІНІЯ ТРИКУТНИКА		
МЕДІАНА ТРИКУТНИКА		
		BK — медіана, K — середина AC, M — точка перетину медіан $\frac{AM}{MN} = \frac{BM}{MK} = \frac{CM}{MT} = \frac{2}{1} \quad m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$ $m_c = \frac{1}{2}c$ — у прямокутному трикутнику медіана, проведена до гіпотенузи, дорівнює половині гіпотенузи.
БІСЕКТРИСА ТРИКУТНИКА		
		BD — бісектриса трикутника $\angle ABD = \angle CBD = \frac{1}{2} \angle B$ Бісектриса трикутника ділить протилежну сторону на відрізки, довжини яких пропорційні прилеглим сторонам: $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$ O — точка перетину бісектрис трикутника, центр вписаного кола.

ВИСОТА ТРИКУТНИКА

BD — висота, $BD \perp AC$

Для прямокутного трикутника катет BA — висота ($\angle A = 90^\circ$)

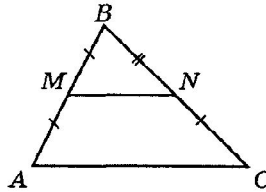


Прямі, що містять висоти трикутника, перетинаються в одній точці (ортоцентр).

$$h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$$

Висоти трикутника обернено пропорційні його сторонам.

СЕРЕДНЯ ЛІНІЯ ТРИКУТНИКА



MN — середня лінія,

M — середина AB ,

N — середина BC

$$MN \parallel AC \quad MN = \frac{1}{2} AC$$

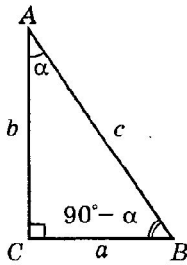
Середня лінія трикутника паралельна одній з його сторін і дорівнює половині цієї сторони.

СПІВВІДНОШЕННЯ МІЖ СТОРОНАМИ ТА КУТАМИ В ТРИКУТНИКУ

ПРЯМОКУТНИЙ ТРИКУТНИК

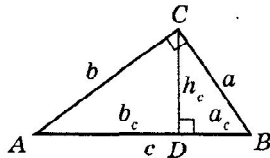
ТЕОРЕМА ПІФАГОРА

$$a^2 + b^2 = c^2$$



$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{a}{c}; \quad \cos \alpha = \frac{b}{c} \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{a}{b}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= c \cdot \sin \alpha \\ b &= c \cdot \cos \alpha \\ a &= b \cdot \operatorname{tg} \alpha \end{aligned}$$

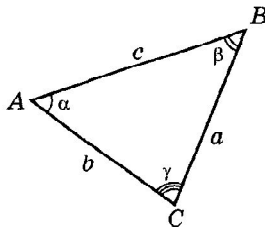


$$\begin{aligned} h_c^2 &= a_c \cdot b_c \\ a^2 &= c \cdot a_c \\ b^2 &= c \cdot b_c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \triangle ACD &\sim \triangle ABC \\ \triangle CBD &\sim \triangle ABC \\ \triangle ACD &\sim \triangle CBD \end{aligned}$$

a, b — катети; c — гіпотенуза

ДОВІЛЬНИЙ ТРИКУТНИК



ТЕОРЕМА СИНУСІВ

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

ТЕОРЕМА КОСИНУСІВ

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

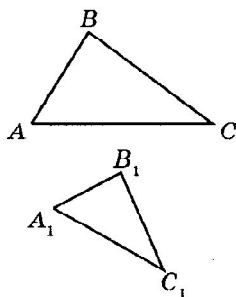
a, b, c — сторони трикутника;
 R — радіус описаного кола

НАСЛІДКИ

1. Якщо у трикутнику $c^2 = a^2 + b^2$, то $\gamma = 90^\circ$, тобто цей трикутник є прямокутним (теорема, обернена до теореми Піфагора).
2. Якщо у трикутнику $c^2 < a^2 + b^2$, то кут γ — гострий ($\cos \gamma > 0$); якщо c — найбільша сторона, то трикутник є гострокутним.
3. Якщо $c^2 > a^2 + b^2$, то кут γ — тупий ($\cos \gamma < 0$).
4. У трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут, проти більшого кута лежить більша сторона: $a > b \Leftrightarrow \alpha > \beta$.

2. Подібність трикутників

ПОДІБНІСТЬ ТРИКУТНИКІВ



$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$

У подібних трикутників відповідні кути рівні, а відповідні відрізки пропорційні:

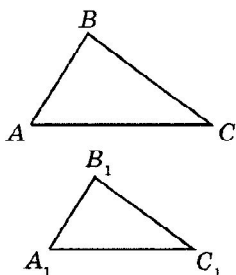
$$\angle A = \angle A_1; \angle B = \angle B_1; \angle C = \angle C_1$$

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{h_1}{h} = \frac{R_1}{R} = k$$

$$\frac{P_1}{P} = \frac{A_1B_1}{AB} = k \quad \frac{S_{\Delta A_1B_1C_1}}{S_{\Delta ABC}} = \left(\frac{A_1B_1}{AB}\right)^2 = k^2$$

Два трикутники називають подібними, якщо вони переводяться один в один перетворенням подібності.

ОЗНАКИ ПОДІБНОСТІ ТРИКУТНИКІВ



1. За двома рівними кутами

Якщо $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$,
то $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

2. За двома пропорційними сторонами і кутом між ними

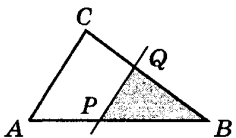
Якщо $\angle A = \angle A_1$, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$,

то $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

3. За трьома пропорційними сторонами

Якщо $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$,

то $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.



4. Пряма, паралельна стороні трикутника, відтинає трикутник, подібний до даного.

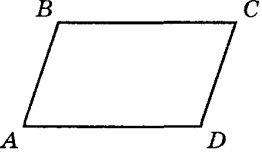
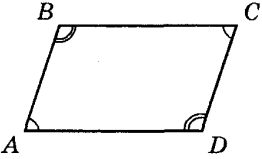
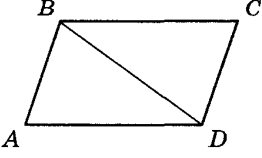
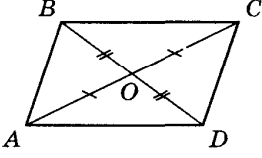
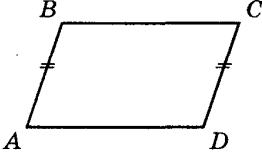
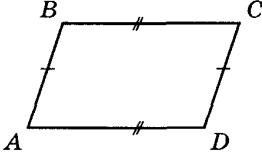
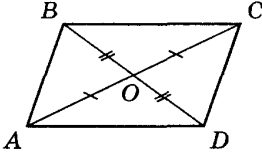
Якщо $PQ \parallel AC$

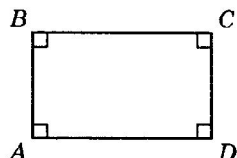
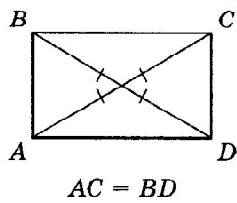
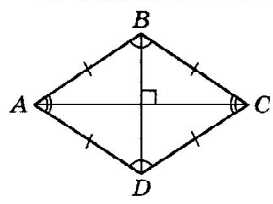
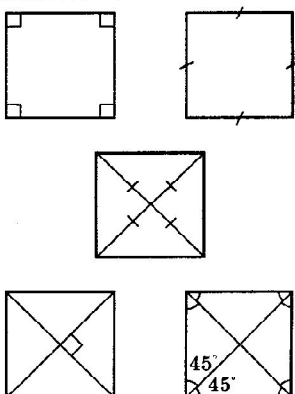
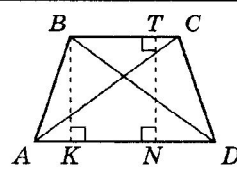
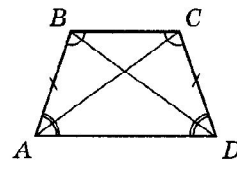
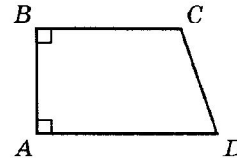
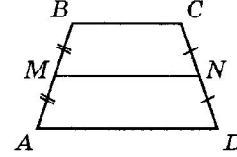
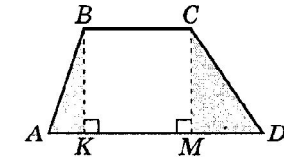
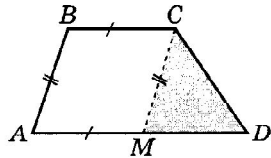
то $\Delta PBQ \sim \Delta ABC$.

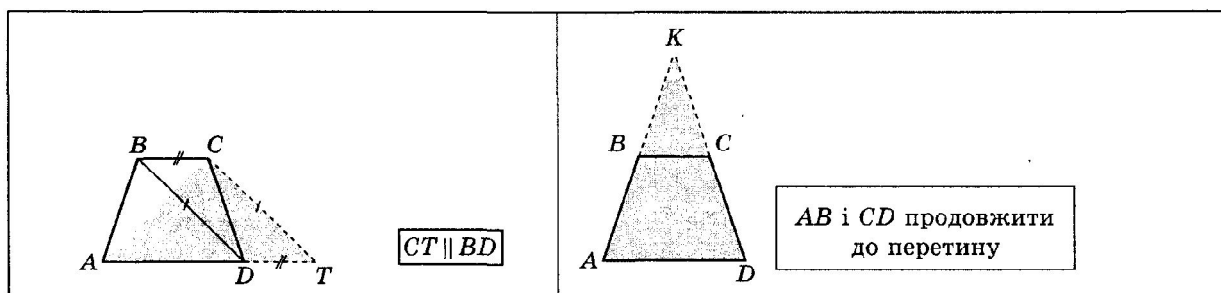
Опорний конспект лекції

Тема. Чотирикутники, їх види та властивості. Многокутники.

1. Чотирикутники, їх види та властивості

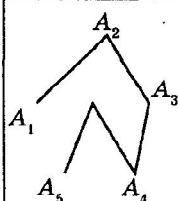
ПАРАЛЕЛОГРАМ ТА ЙОГО ВИДИ	
	Чотирикутник, у якого протилежні сторони попарно паралельні, називають паралелограмом. $ABCD$ — паралелограм $\Leftrightarrow AB \parallel CD, BC \parallel AD$
ВЛАСТИВОСТІ	
	1. Якщо $ABCD$ — паралелограм, то $AB = DC, AD = BC$, $\angle A = \angle C, \angle B = \angle D$. У паралелограма протилежні сторони рівні, протилежні кути рівні.
	2. Якщо $ABCD$ — паралелограм і BD — діагональ, то $\triangle ABD = \triangle CDB$. Діагональ ділить паралелограм на два рівні трикутники.
	3. Якщо $ABCD$ — паралелограм, AC і BD — діагоналі, то $AO = OC, BO = OD$. Діагоналі паралелограма точкою перетину діляться навпіл. 4. $AC^2 + BD^2 = 2(AD^2 + AB^2)$. Сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів усіх його сторін.
ОЗНАКИ	
	1. Якщо $ABCD$ — чотирикутник і $AB \parallel CD, AB = CD$, то $ABCD$ — паралелограм. Якщо в чотирикутнику дві сторони паралельні й рівні, то цей чотирикутник — паралелограм.
	2. Якщо $ABCD$ — чотирикутник і $AB = DC; AD = BC$, то $ABCD$ — паралелограм. Якщо в чотирикутнику протилежні сторони попарно рівні, то цей чотирикутник — паралелограм.
	3. Якщо $ABCD$ — чотирикутник і $AO = OC; BO = OD$, то $ABCD$ — паралелограм. Якщо діагоналі чотирикутника в точці перетину діляться навпіл, то цей чотирикутник — паралелограм.

ПРЯМОКУТНИК	РОМБ	КВАДРАТ
 	 Усі сторони ромба рівні. Діагоналі ромба перпендикулярні. Діагоналі є бісектрисами кутів ромба.	
ТРАПЕЦІЯ		
	$BC \parallel AD$ Чотирикутник, у якого дві сторони паралельні, а дві інші сторони непаралельні, називають трапецією. $ABCD$ — трапеція; AD і BC — основи; AB і CD — бічні сторони; AC і BD — діагоналі; BK і TN — висоти	
ОКРЕМІ ВИДИ ТРАПЕЦІЇ		
	Рівнобічна трапеція — трапеція з рівними бічними сторонами ($AB = CD$). ВЛАСТИВОСТІ $\angle A = \angle D$ Куты при основі рівні (також $\angle B = \angle C$). $AC = BD$ Діагоналі рівні.	
	Прямокутна трапеція — це трапеція, у якої одна бічна сторона перпендикулярна до основ. $h_{\text{прямокутн. трапеції}} = AB$	
СЕРЕДНЯ ЛІНІЯ ТРАПЕЦІЇ		
	Відрізок, який сполучає середини бічних сторін трапеції, називають середньою лінією трапеції. MN — середня лінія	
ВЛАСТИВОСТІ		
$MN \parallel AD$ $MN \parallel BC$	$MN = \frac{AD + BC}{2}$	Середня лінія трапеції паралельна основам і дорівнює їх півсумі.
ТИПОВІ ДОДАТКОВІ ПОБУДОВИ ДЛЯ ТРАПЕЦІЇ (ЗОБРАЖЕНО ШТРИХОВИМИ ЛІНІЯМИ)		
 $BK \perp AD$ $CM \perp AD$	 $CM \parallel BA$	



МНОГОКУТНИКИ

ОЗНАЧЕННЯ

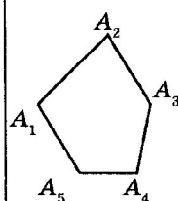


Ламана $A_1A_2A_3\dots A_n$ — це фігура, яка складається з точок $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ і відрізків $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$, що їх сполучають. Точки $A_1, A_2, \dots, A_n$ називають **вершинами ламаної**, а відрізки $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$ — **ланками ламаної**.

Проста ламана — ламана, яка не має точок самоперетину.

Замкнена ламана — ламана, кінці якої збігаються.

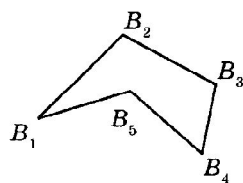
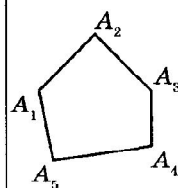
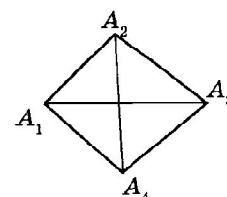
Довжина ламаної — сума довжин її ланок.



Многокутник — проста замкнена ламана, сусідні ланки якої не лежать на одній прямій. Вершини ламаної називають **вершинами многокутника**, а ланки ламаної — **сторонами многокутника**. Многокутник з n вершинами (n сторонами) називають **n -кутником**.

Діагоналі многокутника — відрізки, що сполучають несусідні вершини многокутника.

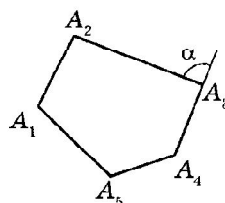
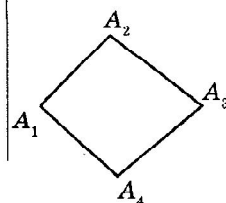
A_1A_3 і A_2A_4 — діагоналі.



Опуклий многокутник — многокутник, який лежить в одній півплощині відносно будь-якої прямої, що містить його сторону.

$A_1A_2A_3A_4A_5$ — опуклий п'ятикутник;

$B_1B_2B_3B_4B_5$ — неопуклий п'ятикутник.



Кут опуклого многокутника при даній вершині — кут, утворений його сторонами, що сходяться в цій вершині. $\angle A_1A_2A_3, \angle A_2A_3A_4, \angle A_3A_4A_1, \angle A_4A_1A_2$ — кути многокутника.

Зовнішній кут опуклого многокутника при даній вершині — кут, суміжний і з внутрішнім кутом многокутника при цій вершині. Кут α — зовнішній кут п'ятикутника при вершині A_3 .

ВЛАСТИВОСТІ

1. Довжина ламаної не менша за довжину відрізка, що сполучає її кінці:

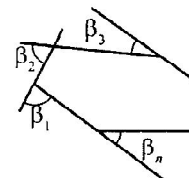
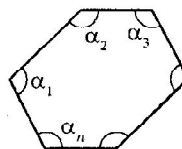
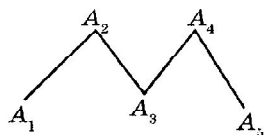
$$A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 + A_4A_5 \geq A_1A_5$$

2. Сума кутів опуклого n -кутника дорівнює $180^\circ (n - 2)$

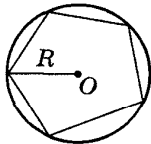
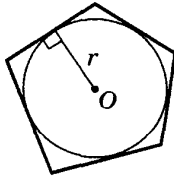
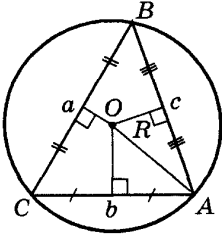
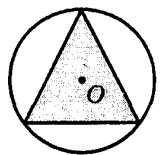
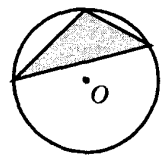
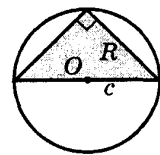
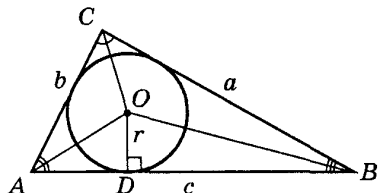
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 180^\circ (n - 2)$$

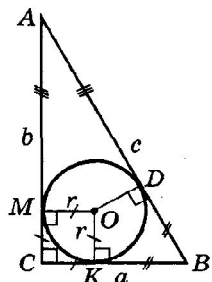
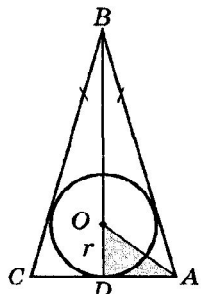
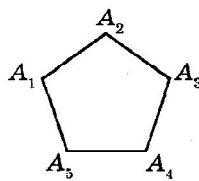
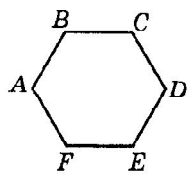
3. Сума зовнішніх кутів опуклого n -кутника, взятих по одному при кожній вершині, дорівнює 360° .

$$\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n = 360^\circ$$



ВПИСАНІ ТА ОПИСАНІ МНОГОКУТНИКИ

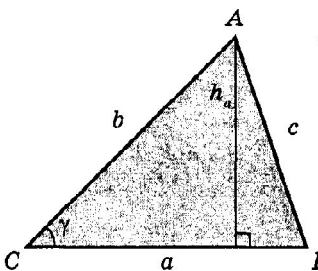
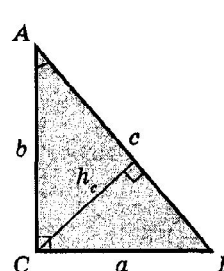
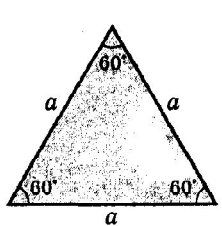
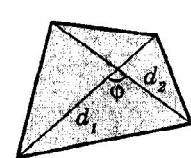
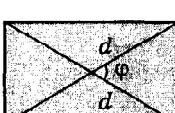
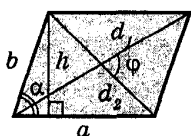
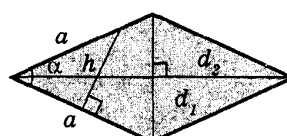
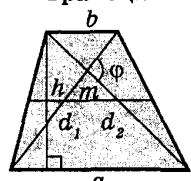
ВПИСАНІ ТА ОПИСАНІ МНОГОКУТНИКИ		
Вписаний многокутник (усі вершини лежать на колі)  Коло описано навколо многокутника.	Описаний многокутник (усі сторони є дотичними до кола)  Коло вписано в многокутник.	
КОЛО, ОПИСАНЕ НАВКОЛО ТРИКУТНИКА		
	Центр O — точка перетину серединних перпендикулярів до сторін трикутника. $OA = OB = OC = R$ $R = \frac{a}{2\sin A}; \quad R = \frac{abc}{4S_{\triangle ABC}}$	
ПОЛОЖЕННЯ ЦЕНТРА КОЛА, ОПИСАНОГО НАВКОЛО ТРИКУТНИКА		
Гострокутний трикутник 	Тупокутний трикутник 	Прямокутний трикутник  Центр O — середина гіпотенузи. $R = \frac{c}{2}$
КОЛО, ВПИСАНЕ В ТРИКУТНИК		
	Центр O — точка перетину бісектрис внутрішніх кутів трикутника. $OD = r; \quad OD \perp AB$ $r = \frac{S_{\triangle ABC}}{p}; \quad p = \frac{a + b + c}{2}$	

ПРЯМОКУТНИЙ ТРИКУТНИК		РІВНОБЕДРЕНИЙ ТРИКУТНИК		
 $OK = OM = OD = r$ ($OKCM$ — квадрат) $r = \frac{a + b - c}{2}$		 $AB = BC$ BD — висота, медіана і бісектриса AO — бісектриса кута A $OD = r$		
ПРАВИЛЬНІ МНОГОКУТНИКИ				
ОЗНАЧЕННЯ				
		Правильний многокутник — опуклий многокутник, у якого всі сторони рівні й всі кути рівні. $ABCDEF$ — правильний шестикутник, $A_1A_2A_3A_4A_5$ — правильний п'ятикутник. Центр правильного многокутника — центр вписаного кола і центр описаного кола.		
ВЛАСТИВОСТІ				
Співвідношення між стороною правильного многокутника і радіусами вписаного та описаного кіл (окремі випадки)				
Фігура	r через a	R через a	a через r	a через R
Трикутник	$r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$	$R = \frac{a}{\sqrt{3}}$	$a = 2\sqrt{3}r$	$a = \sqrt{3}R$
Квадрат	$r = \frac{a}{2}$	$R = \frac{a}{\sqrt{2}}$	$a = 2r$	$a = \sqrt{2}R$
Шестикутник	$r = \frac{\sqrt{3}a}{2}$	$R = a$	$a = \frac{2r}{\sqrt{3}}$	$a = R$
Площі правильних многокутників (окремі випадки)				
Фігура	S через a	S через r	S через R	
Трикутник	$S = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$	$S = 3\sqrt{3}r^2$	$S = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$	
Квадрат	$S = a^2$	$S = 4r^2$	$S = 2R^2$	
Шестикутник	$S = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$	$S = 2\sqrt{3}r^2$	$S = \frac{3\sqrt{3}}{2}R^2$	

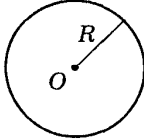
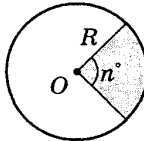
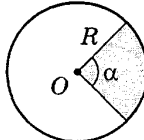
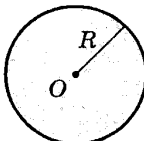
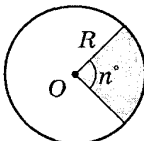
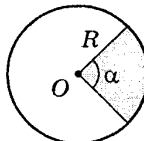
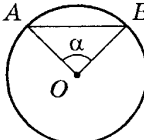
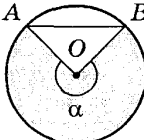
Опорний конспект лекції

Тема. Площі фігур

Площі трикутників і чотирикутників

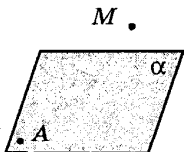
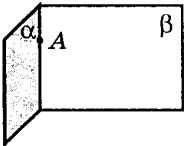
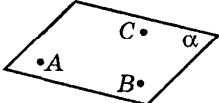
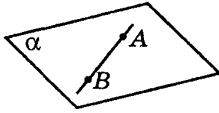
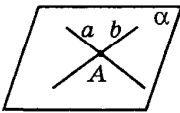
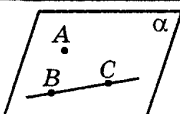
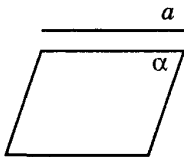
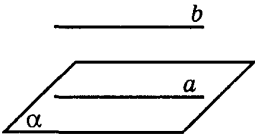
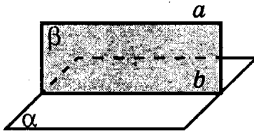
ПЛОЩІ ТРИКУТНИКІВ І ЧОТИРИКУТНИКІВ		
ПЛОЩА ТРИКУТНИКА		
Довільний трикутник  $S = \frac{1}{2} a h_a$ $S = \frac{1}{2} a b \sin \gamma$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ — формула Герона}$ $\left(p = \frac{a+b+c}{2} \right)$ $S = \frac{abc}{4R}, \text{ де } R \text{ — радіус описаного кола}$ $S = r \cdot p, \text{ де } r \text{ — радіус вписаного кола}$	Прямокутний трикутник  $S = \frac{1}{2} ab$ $S = \frac{1}{2} c h_c$ $S = \frac{1}{2} b c \sin A$	Правильний трикутник  $S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$
ПЛОЩА ЧОТИРИКУТНИКА		
Довільний чотирикутник  $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$	Прямокутник  $S = ab$ $S = \frac{1}{2} d^2 \sin \varphi$	Квадрат  $S = a^2$ $S = \frac{1}{2} d^2$
Паралелограм  $S = ah$ $S = ab \sin \alpha$ $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$	Ромб  $S = ah$ $S = a^2 \sin \alpha$ $S = \frac{1}{2} d_1 d_2$	Трапеція  $S = \frac{a+b}{2} h$ $S = mh, m \text{ — середня лінія}$ $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$

Довжина кола і площа круга

ДОВЖИНА КОЛА І ПЛОЩА КРУГА		
ДОВЖИНА КОЛА ТА ЙОГО ЧАСТИН		
 $C = 2\pi R$ — довжина кола	 $l = \frac{2\pi R}{360^\circ} \cdot n^\circ = \frac{\pi R n}{180^\circ}$ — довжина дуги, яка відповідає центральному куту в n градусів	
	 $l = \frac{2\pi R}{2\pi} \cdot \alpha = R \cdot \alpha$ — довжина дуги, яка відповідає центральному куту в α радіан	
ПЛОЩА КРУГА ТА ЙОГО ЧАСТИН		
КРУГ	СЕКТОР	
 $S = \pi R^2$	 Площа кругового сектора, який відповідає центральному куту в n градусів: $S = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot n$	 Площа кругового сектора, який відповідає центральному куту в α радіан: $S = \frac{\pi R^2}{2\pi} \cdot \alpha = \frac{R^2 \alpha}{2}$
СЕГМЕНТ		
		$S_{\text{кругового сегмента}} = S_{\text{кругового сектора}} \mp S_{\triangle AOB}$ (при $\alpha < 180^\circ$ знак «-», при $\alpha > 180^\circ$ знак «+»)

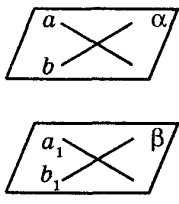
Опорний конспект лекції

Тема. Основні поняття стереометрії

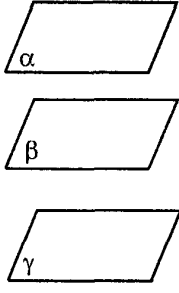
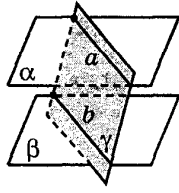
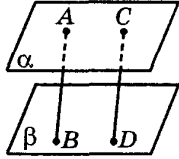
ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ СТЕРЕОМЕТРІЇ	
АКСІОМИ СТЕРЕОМЕТРІЇ ТА НАСЛІДКИ З НИХ	
	1. Якщо б не була площина, існують точки, що належать цій площині, і точки, які не належать їй. $A \in \alpha, M \notin \alpha$
	2. Якщо дві різні площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, що проходить через цю точку.
	3. Через будь-які три точки, що не лежать на одній прямій, можна провести площину, і до того ж тільки одну.
	4. Якщо дві точки прямої лежать у площині, то і вся пряма лежить у цій площині.
	5. Через дві прямі, що перетинаються, можна провести площину, і до того ж тільки одну.
	6. Через пряму та точку, що не лежить на ній, можна провести площину, і до того ж тільки одну.
ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ПРЯМОЇ ТА ПЛОЩИНИ	
	$a \parallel \alpha$ Пряму та площину називають паралельними, якщо вони не перетинаються.
ОЗНАКА	ВЛАСТИВІСТЬ
Якщо $b \parallel a$ (a лежить у площині α), то $b \parallel \alpha$. 	Якщо $a \parallel \alpha$, β проходить через a, β перетинає α по b, то $a \parallel b$. 

ПАРАЛЕЛЬНІ ПЛОЩИНИ І ПАРАЛЕЛЬНІ ПРОЕКЦІЇ

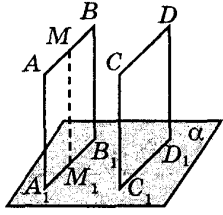
ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ПЛОЩИН

	ОЗНАЧЕННЯ	ОЗНАКА
	Дві площини називають паралельними, якщо вони не перетинаються. $\alpha \parallel \beta$	Якщо $a \parallel a_1$, $b \parallel b_1$ (a і b лежать у пл. α, a_1 і b_1 лежать у пл. β), то $\alpha \parallel \beta$. Якщо дві прямі, що перетинаються, однієї площини відповідно паралельні двом прямим другої площини, то ці площини паралельні.

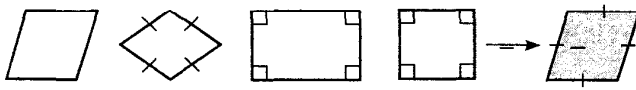
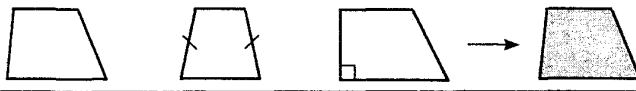
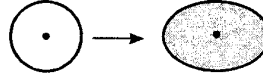
ВЛАСТИВОСТІ

 Якщо $\beta \parallel \alpha$ і $\gamma \parallel \alpha$, то $\beta \parallel \gamma$.	 Якщо $\alpha \parallel \beta$, γ перетинає α по a, γ перетинає β по b, то $a \parallel b$.	 Якщо $AB \parallel CD$ і $\alpha \parallel \beta$ ($A \in \alpha$, $C \in \alpha$, $B \in \beta$, $D \in \beta$), то $AB = CD$.
---	--	---

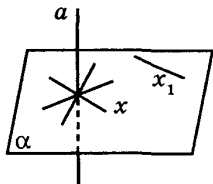
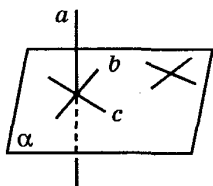
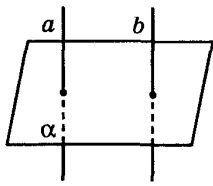
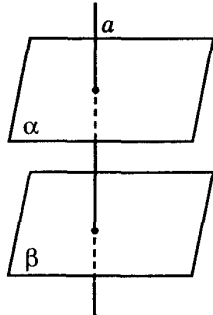
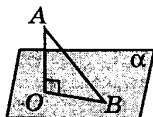
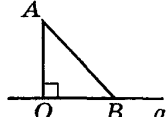
ЗОБРАЖЕННЯ ПРОСТОРОВИХ ФІГУР НА ПЛОЩИНІ

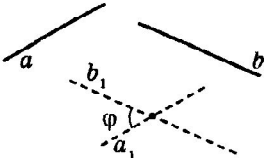
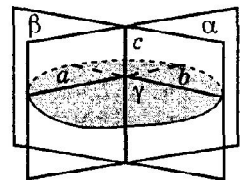
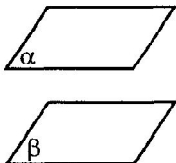
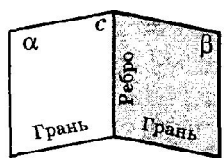
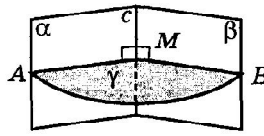
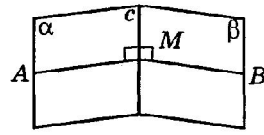
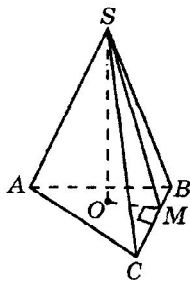
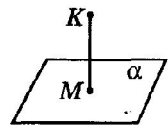
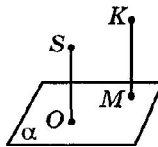
 $\frac{AM}{MB} = \frac{A_1M_1}{M_1B_1}$	$AA_1 \parallel BB_1$. Прямая AA_1 перетинає пл. α в точці A_1. Точка a проектується в точку A_1 на площині α: $A \rightarrow A_1$. Аналогічно $B \rightarrow B_1$, $AB \rightarrow A_1B_1$. Відрізок проектується у відрізок. Якщо $AB \parallel CD$ ($AB \rightarrow A_1B_1$; $CD \rightarrow C_1D_1$), то $A_1B_1 \parallel C_1D_1$ (або вони збігаються). Наслідок. Якщо M — середина AB, $AB \rightarrow A_1B_1$, $M \rightarrow M_1$, то M_1 — середина A_1B_1.
---	---

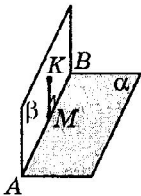
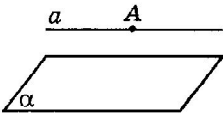
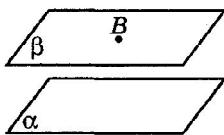
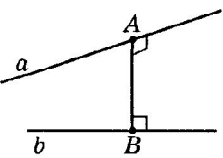
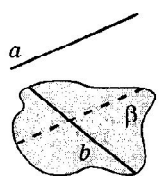
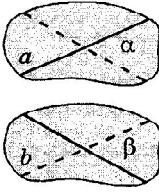
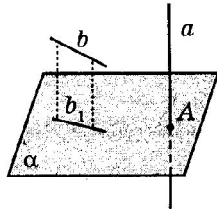
ПАРАЛЕЛЬНІ ПРОЕКЦІЇ ДЕЯКИХ ПЛОСКИХ ФІГУР

	Проекція — трикутник будь-якої форми.
	Проекція — паралелограм будь-якої форми.
	Проекція — трапеція будь-якої форми.
Коло 	Проекція — еліпс .

Перпендикулярність у просторі.

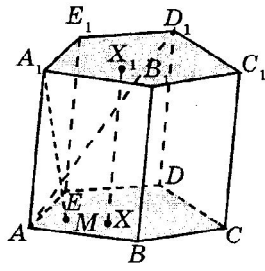
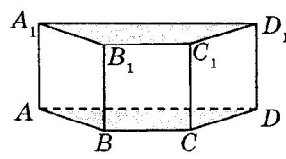
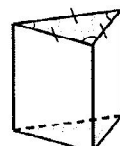
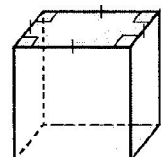
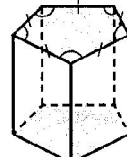
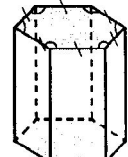
ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ У ПРОСТОРІ		
ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПРЯМОЇ ТА ПЛОЩИНИ		
ОЗНАЧЕННЯ		
	$a \perp \alpha \Leftrightarrow a \perp x$ x — будь-яка пряма площини α $a \perp x_1$	
ОЗНАКА		
	Якщо $a \perp b$ і $a \perp c$ (b і c лежать у площині α і перетинаються), то $a \perp \alpha$.	
ВЛАСТИВОСТІ		
 Якщо $a \parallel b$ і $a \perp \alpha$, то $a \perp b$. Якщо $a \perp \alpha$ і $b \perp \alpha$, то $a \parallel b$.	Якщо $\alpha \parallel \beta$ і $a \perp \alpha$, то $a \perp \beta$. Якщо $\alpha \perp a$ і $\beta \perp a$, то $\alpha \parallel \beta$. 	
ПЕРПЕНДИКУЛЯР І ПОХИЛА		
У ПРОСТОРІ		НА ПЛОЩИНІ
$AO \perp a$ $O \in \alpha$  OB — проекція похилої AB на площину α	AO — перпендикуляр AO — відстань від точки A до площини α AO — відстань від точки A до прямої a	$AO \perp a$ $O \in a$  OB — проекція похилої AB на пряму a

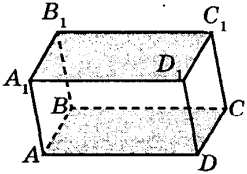
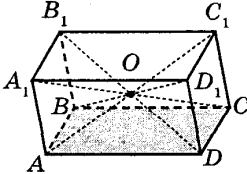
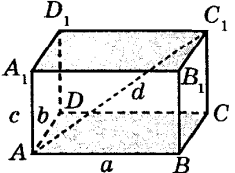
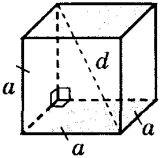
КУТ МІЖ МИМОБІЖНИМИ ПРЯМИМИ			
	$a \parallel a_1; b \parallel b_1$ $\angle (ab) = \angle (a_1b_1) = \varphi$ (φ — менший із суміжних кутів) $0^\circ < \angle (ab) < 90^\circ$		
КУТ МІЖ ПЛОЩИНАМИ			
 $0^\circ < \angle (\alpha\beta) < 90^\circ$	α перетинає β по прямій c . Проведемо площину $\gamma \perp c$. <i>Кутом між площинами α і β, що перетинаються, називають кут між прямими, по яких площина γ перетинає площини α і β.</i> $\angle (\alpha\beta) = \angle (ab)$	 $\frac{\alpha \parallel \beta}{\alpha = \beta} \Leftrightarrow \angle (\alpha\beta) = 0^\circ$	
ДВОГРАННИЙ КУТ (КУТ МІЖ ПІВПЛОЩИНАМИ)			
	<i>Двогранним кутом називають фігуру, утворену двома півплощинами зі спільною прямою, що їх обмежує.</i>		
ЛІНІЙНИЙ КУТ ДВОГРАННОГО КУТА			
	$\angle AMB$ — лінійний кут ($\gamma \perp c, \gamma$ перетинає α по променю MA , γ перетинає β по променю MB). ВЛАСТИВІСТЬ <i>Площина лінійного кута перпендикулярна до кожної грані двогранного кута.</i>		
ПРАКТИЧНІ СПОСОБИ ПОБУДОВИ ЛІНІЙНОГО КУТА			
 $M \in c,$ $MA \perp c$ (у грані α), $MB \perp c$ (у грані β) $\angle AMB$ — лінійний	 $SO \perp \text{пл. } ABC,$ $OM \perp BC.$ Тоді $SM \perp BC.$ $\angle SMO$ — лінійний кут двогранного кута при ребрі BC		
ВІДСТАНІ У ПРОСТОРІ			
(способи, які використовують для їх обчислення)			
ВІДСТАНЬ ВІД ТОЧКИ ДО ПЛОЩИНИ (ρ — відстань)			
	Проводимо $KM \perp \alpha$ ($M \in \alpha$). $KM = \rho (K; \alpha)$		$SO \perp \alpha$ Проводимо $KM \parallel SO$, тоді $KM \perp \alpha.$ $KM = \rho (K; \alpha)$

	Проводимо через точку K площину $\beta \perp \alpha$ (β перетинає α по AB). Проводимо $KM \perp AB$. Тоді $KM \perp \alpha$. $KM = \rho(K; \alpha)$	
ВІДСТАНЬ (ρ) МІЖ ПАРАЛЕЛЬНИМИ ПРЯМОЮ І ПЛОЩИНОЮ		ВІДСТАНЬ (ρ) МІЖ ПАРАЛЕЛЬНИМИ ПЛОЩИНАМИ
 $a \parallel \alpha, A \in a$ $\rho(a; \alpha) = \rho(A; \alpha)$		 $\beta \parallel \alpha, B \in \beta$ $\rho(\beta; \alpha) = \rho(B; \alpha)$
ВІДСТАНЬ (ρ) МІЖ МИМОБІЖНИМИ ПРЯМИМИ		
	Відстанню між мимобіжними прямими називають довжину їх спільного перпендикуляра. $AB \perp a, AB \perp b,$ $\rho(a; b) = AB$ Прямі a і b — мимобіжні	
СПОСОБИ ОБЧИСЛЕННЯ ВІДСТАНІ (ρ) МІЖ МИМОБІЖНИМИ ПРЯМИМИ		
Проводимо через пряму b площину $\beta \parallel a$.  $\rho(a; b) = \rho(a; \beta)$	Проводимо через прямі a і b паралельні площини $\alpha \parallel \beta$.  $\rho(a; b) = \rho(\alpha; \beta)$	Проводимо площину $\alpha \perp a$ і проєкуємо прямі a і b на цю площину: $a \rightarrow A, b \rightarrow b_1$.  $\rho(a; b) = \rho(A; b_1)$

Опорний конспект лекції

Тема. Призми , їх види та властивості.

ПРИЗМА			
ДОВІЛЬНА ПРИЗМА			
		Призмою називають многогранник, що складається з двох плоских многокутників, які лежать у різних площинах і суміщаються паралельним перенесенням, та всіх відрізків, що сполучають відповідні точки цих многокутників. $ABCDE$ і $A_1B_1C_1D_1E_1$ — основи призми; $AA_1, BB_1, \dots$ — бічні ребра; $ABB_1A_1, BCC_1B_1, \dots$ — бічні грані	
AD_1 — діагональ призми — сполучає дві вершини призми, що не належать одній грані. Висота призми — відстань між площинами її основ. $A_1M \perp \text{пл. } ABCDE$; $A_1M = H$ — висота			
1. Основи призми рівні: $ABCDE = A_1B_1C_1D_1E_1$ 2. Основи призми лежать у паралельних площинах: пл. $ABCDE \parallel \text{пл. } A_1B_1C_1D_1E_1$ 3. Бічні ребра призми паралельні й рівні: $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \dots$ $AA_1 = BB_1 = CC_1 \dots$		4. Бічні грані призми — паралелограми: ABB_1A_1 — паралелограм; BCC_1B_1 — паралелограм, ... 5. $V_{\text{призми}} = S_{\text{осн}} \cdot H_{\text{призми}}$ 6. $S_{\text{бічн}} = P_{\text{перп. перерізу}} \cdot AA_1$ ($S_{\text{бічн}} = S_{ABB_1A_1} + S_{BCC_1B_1} + \dots + S_{AEE_1A_1}$) 7. $S_{\text{повна}} = S_{\text{бічн}} + 2S_{\text{осн}}$	
ПРЯМА ПРИЗМА			
		Призму називають прямою, якщо її бічні ребра перпендикулярні до основ. $AA_1 \perp \text{пл. } ABCD$, $BB_1 \perp \text{пл. } ABCD \dots$	
1. Висота прямої призми дорівнює бічному ребру: $H_{\text{прямої призми}} = AA_1 = BB_1 = \dots$ 2. Бічні грані прямої призми — прямокутники: ABB_1A_1 — прямокутник; BCC_1B_1 — прямокутник, ...		3. $V_{\text{прямої призми}} = S_{\text{осн}} \cdot H = S_{\text{осн}} \cdot AA_1$ 4. $S_{\text{бічн}} = P_{\text{осн}} \cdot AA_1$ 5. $S_{\text{повна}} = S_{\text{бічн}} + 2S_{\text{осн}}$	
ПРАВИЛЬНА ПРИЗМА			
Пряму призму називають правильною, якщо її основи є правильними многокутниками.			
Трикутна	Чотирикутна	П'ятикутна	Шестикутна
			

ПАРАЛЕЛЕПІПЕД	
ДОВІЛЬНИЙ ПАРАЛЕЛЕПІПЕД	
	
Паралелепіпедом називають призму, в основі якої лежить паралелограм. - У паралелепіпеда всі грані — паралелограми. - У паралелепіпеда протилежні грані паралельні й рівні. - Діагоналі паралелепіпеда перетинаються в одній точці і точкою перетину діляться навпіл. O — середина діагоналей A_1C, B_1D, AC_1, BD_1	
ПРЯМОКУТНИЙ ПАРАЛЕЛЕПІПЕД	
Прямий паралелепіпед, у якого основою є прямокутник, називають прямокутним паралелепіпедом. 	- У прямокутного паралелепіпеда всі грані — прямокутники. $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$, або $AC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2$ У прямокутному паралелепіпеді квадрат будь-якої діагоналі дорівнює сумі квадратів трьох його вимірів. $V_{\text{прямокут. паралелеп.}} = AB \cdot AD \cdot AA_1 = abc$ $S_{\text{бічн}} = P_{\text{осн}} \cdot AA_1 = 2(AB + AD) \cdot AA_1 = 2(a + b)c$ $S_{\text{повна}} = S_{\text{бічн}} + 2S_{\text{осн}}$
КУБ	
Кубом називають прямокутний паралелепіпед, у якого всі ребра рівні. 	- У куба всі грані — квадрати. $d = a\sqrt{3}$, де d — діагональ куба, $d^2 = a^2 + a^2 + a^2$, де a — ребро куба $V_{\text{куба}} = a^3$ $S_{\text{бічн}} = 4a^2$; $S_{\text{повна}} = 6a^2$

Завдання 1

Обчисліть довжину меншої діагоналі прямої призми, в основі якої ромб зі стороною 6 м та гострим кутом 60° . Висота призми 8 м. [Т. 2003.]

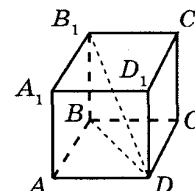
А	Б	В	Г	Д
9 м	9,5 м	10 м	10,5 м	$2\sqrt{43}$ м

Розв'язання

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — пряма призма, $ABCD$ — ромб, $AB = 6$ м, $\angle BAD = 60^\circ$, $AA_1 = 8$ м. Оскільки $AB = AD$ і $\angle BAD = 60^\circ$, то $\triangle ABD$ — рівносторонній, тоді $BD = 6$ м. Із прямокутного трикутника $BB_1 D$ маємо:

$$B_1 D = \sqrt{BB_1^2 + BD^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 \text{ (м)}.$$

Відповідь: В.



Завдання 2

Основою прямого паралелепіпеда є ромб із гострим кутом 60° і більшою діагоналлю $6\sqrt{3}$ см. Менша діагональ паралелепіпеда утворює з площиною основи кут 45° . Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда (у см^2). [Т. 2009.]

Розв'язання

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямий паралелепіпед, $ABCD$ — ромб, $\angle BAD = 60^\circ$, $AC = 6\sqrt{3}$ см, $\angle B_1 DB = 45^\circ$.

Із прямокутного трикутника AOD маємо: $OD = AO \cdot \operatorname{tg} \angle OAD = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot \operatorname{tg} \frac{\angle BAD}{2} = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 3$ (см).

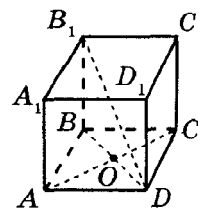
Тоді $AD = 2 \cdot OD = 6$ (см), $BD = 2 \cdot OD = 2 \cdot 3 = 6$ (см).

Із прямокутного трикутника $BB_1 D$:

$BB_1 = BD \cdot \operatorname{tg} \angle B_1 DB = 6 \cdot \operatorname{tg} 45^\circ = 6$ (см).

$S_{\text{бічн}} = 4AB \cdot BB_1 = 4 \cdot 6 \cdot 6 = 144$ (см^2).

Відповідь: 144.



Завдання 3

У правильній трикутній призмі сторона основи дорівнює 4 см, висота — 8 см. Через сторону основи під кутом 60° до її площини проведено площину. Знайдіть: а) площу утвореного перерізу; б) відношення об'ємів частин, на які проведена площина ділить призму. [Т. 2009.]

Розв'язання

Нехай $ABCA_1 B_1 C_1$ — правильна призма, $AB = BC = AC = 4$ см, $AA_1 = BB_1 = CC_1 = 8$ см, (BCD) — січна площина. Проведемо $AK \perp BC$. Тоді $DK \perp BC$ (за теоремою про три перпендикуляри)

і $\angle DKA = 60^\circ$. Із $\triangle ABC$ одержуємо: $AK = AC \cdot \cos 30^\circ = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$.

Із $\triangle ADK$ маємо: $AD = AK \cdot \operatorname{tg} \angle DKA = 2\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 6$ (см)

і $DK = \frac{AK}{\cos \angle AKD} = \frac{2\sqrt{3}}{\cos 60^\circ} = 4\sqrt{3}$ (см).

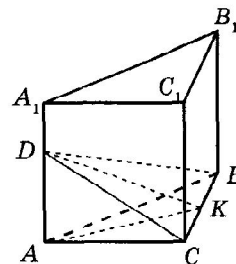
Оскільки $AD < AA_1$, то точка D лежить між точками A та A_1 , отже, $\triangle BCD$ — шуканий переріз.

а) $S_{\text{перер}} = S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \cdot DK \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 4 = 8\sqrt{3}$ (см^2).

б) $\frac{V_{ADBC}}{V_{ADBCB_1C_1}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot AD}{S_{\triangle ABC} \cdot AA_1 - \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot AD} = \frac{\frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot AD}{S_{\triangle ABC} \left(AA_1 - \frac{1}{3} AD \right)} = \frac{AD}{3 \left(AA_1 - \frac{1}{3} AD \right)} = \frac{AD}{3AA_1 - AD} =$

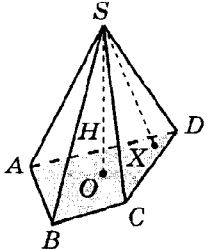
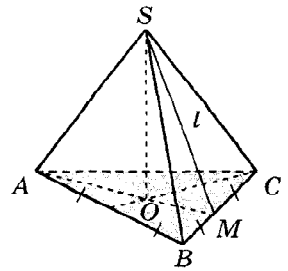
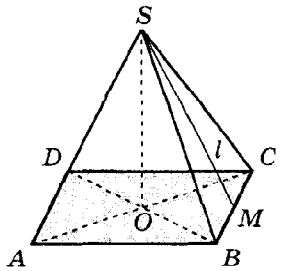
$$\frac{6}{3 \cdot 8 - 6} = \frac{6}{24 - 6} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}.$$

Відповідь: а) $8\sqrt{3}$; б) $\frac{1}{3}$.



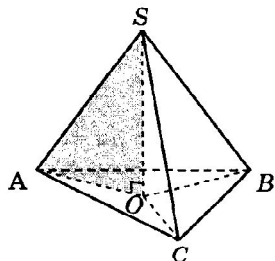
Опорний конспект лекції

Тема. Піраміди та їх властивості

ПІРАМІДА	
ДОВІЛЬНА ПІРАМІДА	
	Пірамідою називають многогранник, який складається з плоского многокутника (основи піраміди), точки, яка не лежить у площині основи (вершини піраміди), і всіх відрізків, що сполучають вершину піраміди з точками основи.
$ABCD$ — основа піраміди; SA, SB, SC, SD — бічні ребра $\triangle ASB, \triangle BSC, \triangle CSD, \triangle ASD$ — бічні грані	
SO — висота піраміди	$V_{\text{пір}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H$
$SO \perp \text{пл. } ABCD, SO = H$	
$S_{\text{бічн}} = S_{\triangle ASB} + S_{\triangle BSC} + S_{\triangle CSD} + S_{\triangle ASD}$	$S_{\text{повна}} = S_{\text{бічн}} + S_{\text{осн}}$
ПРАВИЛЬНА ПІРАМІДА	
ТРИКУТНА	ЧОТИРИКУТНА
	
$\triangle ABC$ — правильний O — точка перетину медіан (висот і бісектрис), центр вписаного й описаного кіл	$ABCD$ — квадрат O — точка перетину діагоналей
Піраміду називають правильною, якщо її основою є правильний многокутник, а основа висоти збігається з центром цього многокутника. SO — висота правильної піраміди ($SO \perp \text{пл. } ABC$; O — центр основи) SM — апофема правильної піраміди — висота бічної грані ($SM \perp BC$)	
- У правильній піраміді бічні ребра рівні й однаково нахилені до площини основи: $SA = SB = SC = \dots$ $\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO = \dots$ - Бічні грані правильної піраміди — рівні між собою рівнобедрені трикутники, однаково нахилені до площини основи. $S_{\text{бічн}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн}} \cdot SM = \frac{1}{2} P_{\text{осн}} \cdot l$, де l — апофема.	

4. $S_{\text{бічн}} = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos \varphi}$, де $\varphi = \angle SMO$ — кут нахилу всіх бічних граней до основи;
 $S_{\text{бічн}} = S_{\text{бічн. грані}} \cdot n$, де n — кількість граней.
5. $S_{\text{повна}} = S_{\text{бічн}} + S_{\text{осн}}$
6. $V_{\text{пір}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H$

ПОЛОЖЕННЯ ВИСОТИ В ДЕЯКИХ ВИДАХ ПІРАМІД

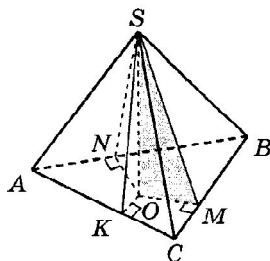


Якщо всі бічні ребра піраміди рівні, або нахилені під одним кутом до площини основи, або утворюють рівні кути з висотою піраміди, то основою висоти піраміди є центром кола, описаного навколо основи (і навпаки).

Для розв'язування використовують прямокутний $\triangle SOA$, у якому:

$$SO \perp AO, AO = r_{\text{кола, опис. навк. основи}}$$

$\angle SAO$ — кут нахилу бічного ребра SA до площини основи



Якщо всі бічні грані піраміди однаково нахилені до основи, то основою висоти піраміди є центр кола, вписаного в основу (і навпаки).

Для розв'язування використовують прямокутний $\triangle SOM$, у якому:

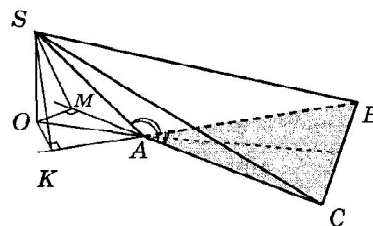
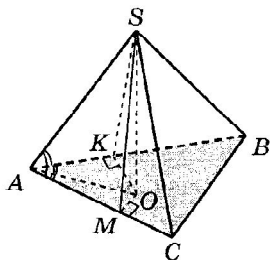
$$SO \perp OM, OM = r_{\text{кола, впис. в основу}} (OM \perp BC),$$

$\angle SMO$ — кут нахилу бічної грані SBC до площини основи
 $(\angle SMO$ — лінійний кут двогранного кута при ребрі $BC)$

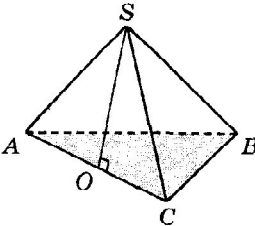
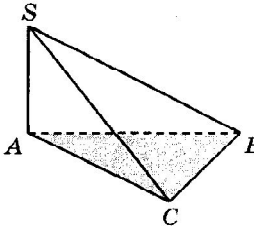
Для такого виду пірамід виконується формула

$$S_{\text{бічн}} = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos \varphi},$$

де $\varphi = \angle SMO$ — кут нахилу всіх бічних граней до площини основи.



Якщо лише дві бічні грані піраміди (або похилої призми) однаково нахилені до площини основи або спільне бічне ребро цих граней утворює рівні кути із суміжними з ним сторонами основи, то це спільне бічне ребро проектується на пряму, що містить бісектрису кута між суміжними з цим ребром сторонами основи (і навпаки).

	
Якщо лише одна бічна грань піраміди перпендикулярна до площини основи, то висотою піраміди буде висота цієї грані.	Якщо дві суміжні бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи, то висотою піраміди буде їх спільне бічне ребро.

Завдання 1

Скільки всього граней у піраміді, основою якої є шестикутник? [Т. 2009.]

А	Б	В	Г	Д
6	7	12	18	36

Розв'язання

Оскільки основою піраміди є шестикутник, то дана піраміда має шість бічних граней. Отже, дана піраміда має сім граней.

Відповідь: Б.

Завдання 2

Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 6 см. Знайдіть повну поверхню піраміди (у см^2), якщо кут між апофемою та висотою піраміди дорівнює 30° . [Т. 2009.]

Розв'язання

$SABCD$ — правильна піраміда, $SO \perp (ABC)$, $AB = 6$ см, $SK \perp DC$, $\angle OSK = 30^\circ$.

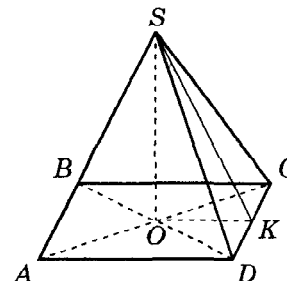
$$S_{\text{пір}} = S_{\text{осн}} + S_{\text{бічн}} = AB^2 + \frac{1}{2} \cdot 4 AB \cdot SK = AB^2 + 2 AB \cdot SK.$$

Оскільки $SK \perp DC$, $SO \perp (ABC)$, то $OK \perp DC$ (за теоремою про три перпендикуляри), $OK = \frac{1}{2} AD = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$ (см).

Із $\triangle SOK$: $SK = 2OK = 2 \cdot 3 = 6$ (см).

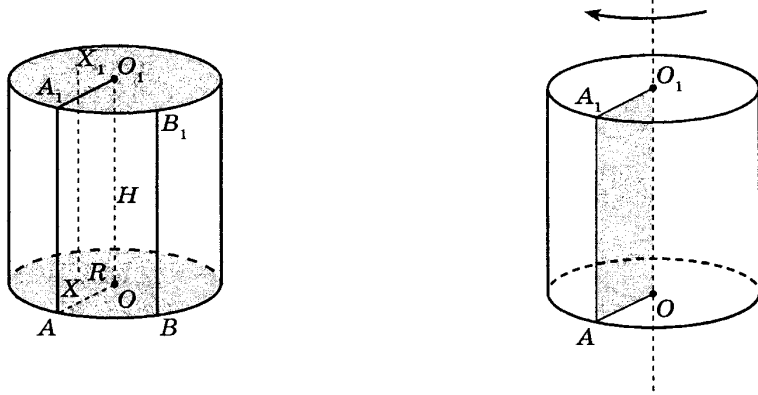
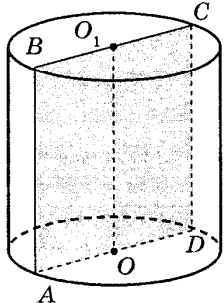
$$S_{\text{пір}} = 6^2 + 2 \cdot 6 \cdot 6 = 36 + 72 = 108 \text{ (см}^2\text{)}.$$

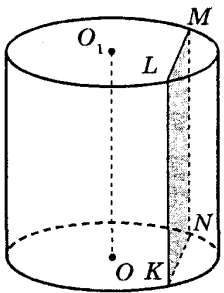
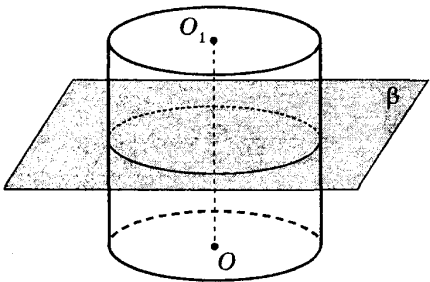
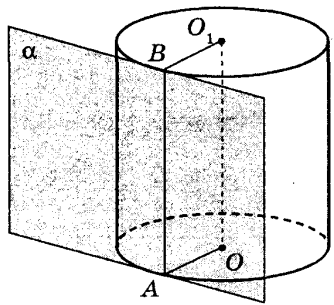
Відповідь: 108.



Опорний конспект лекції

Тема.Циліндр та його властивості

ЦИЛІНДР	
	
Циліндром (круговим циліндром) називають тіло, що складається з двох кругів, які не лежать в одній площині й суміщаються паралельним перенесенням, і всіх відрізків, які сполучають відповідні точки цих кругів. Круги — основи циліндра. Відрізки, що сполучають відповідні точки кіл кругів,— твірні: AA_1, BB_1 — твірні циліндра. Циліндр називають прямим, якщо його твірні перпендикулярні до площин основ. У шкільних підручниках: циліндр = прямий круговий циліндр	
- Основи циліндра рівні й паралельні: $OA = O_1A_1 = R$; пл. $AOB \parallel$ пл. $A_1O_1B_1$, де O — центр нижньої основи циліндра; O_1 — центр верхньої основи - Твірні циліндра паралельні й рівні: $AA_1 \parallel BB_1, AA_1 = BB_1$ - Висота циліндра (відстань між площинами основ) дорівнює твірній: $H_{\text{цил}} = AA_1 = OO_1$ - Під час обертання прямокутника навколо його сторони як осі утворюється циліндр: OAA_1O_1 — прямокутник; OO_1 — вісь утвореного циліндра; $R_{\text{утв. цил}} = OA = O_1A_1, H_{\text{цил}} = OO_1 = AA_1$ $S_{\text{осн}} = \pi R^2$; $S_{\text{бічн}} = 2\pi RH$; $S_{\text{повна}} = S_{\text{бічн}} + 2S_{\text{осн}} = 2\pi R (H + R)$ $V_{\text{цил}} = S_{\text{осн}} \cdot H = \pi R^2 H$	
ПЕРЕРІЗИ ЦИЛІНДРА ПЛОЩИНАМИ	
ОСЬОВИЙ ПЕРЕРІЗ ЦИЛІНДРА	
	$ABCD$ — осьовий переріз — проходить через вісь OO_1 $ABCD$ — прямокутник $AD = d_{\text{осн}} = 2R, AB = H_{\text{цил}}$ AB і CD — твірні циліндра

ПЕРЕРІЗ ЦИЛІНДРА ПЛОЩИНОЮ, ПАРАЛЕЛЬНОЮ ЙОГО ОСІ	
	пл. $KLMN \parallel OO_1$ $KLMN$ — прямокутник KL і MN — твірні циліндра $KL = H_{\text{цил}}$
ПЕРЕРІЗ ЦИЛІНДРА ПЛОЩИНОЮ, ПАРАЛЕЛЬНОЮ ЙОГО ОСНОВАМ	
	$R_{\text{пер}} = R_{\text{осн}}$
Площина, паралельна площині основи циліндра, перетинає його бічну поверхню по колу, яке дорівнює колу основи.	
ДОТИЧНА ДО ЦИЛІНДРА ПЛОЩИНА	
	α — дотична до циліндра площина AB — твірна α проходить через AB $\alpha \perp \text{пл. } AOO_1B$
Дотичною до циліндра площиною називають площину, яка проходить через твірну циліндра і перпендикулярна до площини осевого перерізу, що містить цю твірну.	

Завдання 1

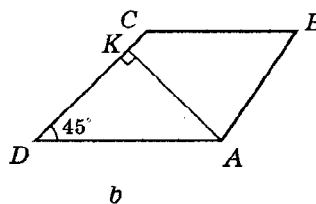
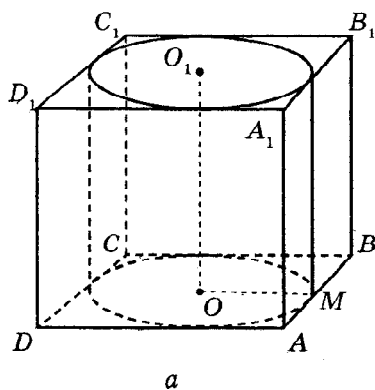
У пряму призму вписано циліндр, площа бічної поверхні якого дорівнює 10π . Основа призми — ромб із кутом 45° . Відстань між віссю циліндра і діагоналлю бічної грані призми дорівнює $\sqrt{2}$. Знайдіть об'єм призми.

Розв'язання

Нехай $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — задана пряма призма, і в неї вписано циліндр з віссю OO_1 (рис. а). Тоді висота призми дорівнює висоті циліндра ($H_{\text{призми}} = H_{\text{циліндра}} = OO_1 = AA_1$), основи циліндра вписано в основи призми (точки O і O_1 — точки перетину діагоналей ромбів основ). Отже, радіус основи циліндра дорівнює радіусу кола, вписаного в ромб із кутом 45° . У площині основи проведемо $OM \perp AB$, тоді $OM = r_{\text{опис}} = R_{\text{цил}}$.

Щоб одержати відстань між мимобіжними прямими OO_1 і діагоналлю бічної грані AB_1 , використаємо властивість: відстань між мимобіжними прямими дорівнює відстані між їх проекціями на площину, перпендикулярну до однієї з цих прямих.

Оскільки $OO_1 \perp \text{пл. } ABCD$, то спроекуємо ці прямі на площину $ABCD$. Пряма OO_1 проєктується в точку O , а пряма AB_1 — у пряму AB . Тоді відстань між прямими OO_1 і AB_1 дорівнює відстані від точки O до прямої AB , тобто дорівнює OM ($OM \perp AB$). Отже, $OM = \sqrt{2}$. Таким чином, $r_{\text{впис}} = R_{\text{цил}} = OM = \sqrt{2}$.



Ураховуючи, що $S_{\text{бічна цил}} = 2\pi RH$, одержуємо $10\pi = 2\pi \cdot \sqrt{2} \cdot H$. Тоді $H = \frac{5}{\sqrt{2}}$.

У ромбі $ABCD$ проведемо $AK \perp CD$ (рис. б). Оскільки діаметр вписаного кола дорівнює висоті ромба, то $AK = 2OM = 2\sqrt{2}$. Із прямокутного трикутника ADK ($\angle D = 45^\circ$ за умовою):

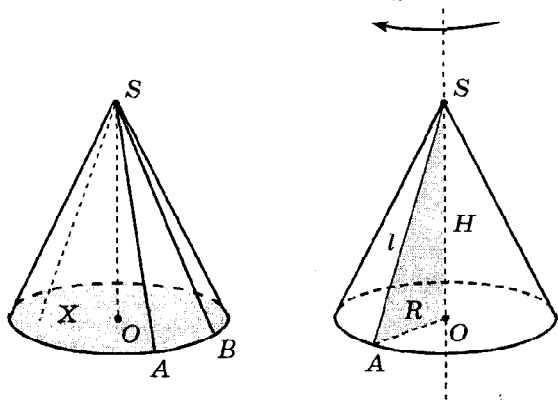
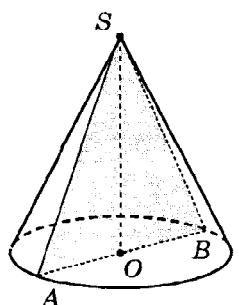
$$AD = \frac{AK}{\sin 45^\circ} = 4. \text{ Тоді } S_{ABCD} = AD \cdot DC \cdot \sin 45^\circ = 8\sqrt{2} \text{ і } V_{\text{призми}} = S_{ABCD} \cdot H = 8\sqrt{2} \cdot \frac{5}{\sqrt{2}} = 40.$$

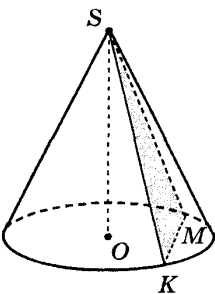
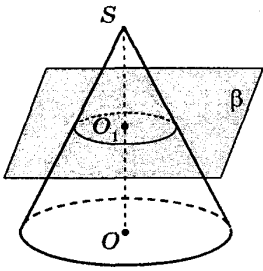
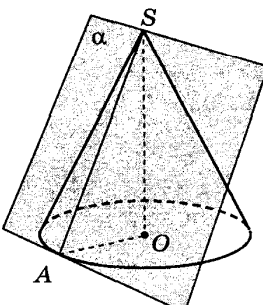
Відповідь: 40.

Зауваження. У цьому разі відповідь можна записати також у вигляді «40 куб. од.». Однак якщо ми знаходимо об'єм куба з ребром a й одержуємо $V = a^3$, недоречно записувати до відповіді « a^3 куб. од.», оскільки в позначенні a вже є якась розмірність. (Наприклад, якщо $a = 2$ см, то записуючи таким чином ми одержимо $V = a^3$ куб. од. = 8 см³ куб. од.). Тому у випадках, коли автори завдання задають відрізки (площі, об'єми) числом без указівки одиниць виміру, то і до відповіді слід записувати тільки одержані числа без одиниць виміру.

Опорний конспект лекції

Тема.Конус та його властивості

КОНУС	
	Конусом (круговим конусом) називають тіло, що складається з круга, точки, яка не лежить у площині цього круга, і всіх відрізків, що сполучають дану точку з точками круга. <i>Круг — основа конуса.</i>
Відрізки, що сполучають вершину конуса з точками кола основи, — твірні. SA, SB — твірні конуса. Конус називають прямим, якщо $SO \perp$ пл. AOB (O — центр круга основи). У шкільних підручниках: конус = прямий круговий конус	
1. Твірні конуса рівні: $SA = SB = \dots$ 2. $H_{\text{кон}} = SO$ ($SO \parallel$ пл. AOB) 3. Під час обертання прямокутного трикутника навколо його катета як осі утворюється конус: $\triangle AOS$ прямокутний, $\angle AOS = 90^\circ$, пряма SO — вісь конуса, $R_{\text{осн. кон}} = AO$, $H_{\text{кон}} = SO$, AS — твірна, $AS = l$. 4. $S_{\text{осн. кон}} = \pi R^2$; $S_{\text{бічн. кон}} = \pi Rl$; $S_{\text{повна}} = S_{\text{бічн}} + S_{\text{осн}} = \pi R(l + R)$ 5. $V_{\text{кон}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H = \frac{1}{3} \pi R^2 H$	
ПЕРЕРІЗИ КОНУСА ПЛОЩИНАМИ	
ОСЬОВИЙ ПЕРЕРІЗ КОНУСА	
	$\triangle SAB$ — осьовий переріз — проходить через вісь SO $\triangle SAB$ рівнобедрений, $SA = SB$ (SA і SB — твірні конуса)

ПЕРЕРІЗ КОНУСА ПЛОЩИНОЮ, ЩО ПРОХОДИТЬ ЧЕРЕЗ ЙОГО ВЕРШИНУ	
	$\triangle SMK$ рівнобедрений, $SM = SK$ $(SM \text{ і } SK — \text{твірні конуса})$
ПЕРЕРІЗ КОНУСА ПЛОЩИНОЮ, ПАРАЛЕЛЬНОЮ ЙОГО ОСНОВІ	
	$\frac{R_{\text{пер}}}{R_{\text{осн. кон}}} = \frac{SO_1}{SO}$ Площина, паралельна площині основи конуса, перетинає конус по колу, а бічну поверхню — по колу з центром на осі конуса.
ДОТИЧНА ДО КОНУСА ПЛОЩИНА	
	α — дотична до конуса площина; SA — твірна; α проходить через SA; $\alpha \parallel \text{пл. } SOA$ Дотичною до конуса площиною називають площину, яка проходить через твірну конуса і перпендикулярна до площини осевого перерізу, що містить цю твірну.

Завдання

Знайдіть площу бічної поверхні конуса, твірна якого дорівнює 10 см, а довжина кола основи — 12π см. [Т. 2009.]

А	Б	В	Г	Д
$48\pi \text{ см}^2$	$60\pi \text{ см}^2$	$96\pi \text{ см}^2$	$120\pi \text{ см}^2$	$288\pi \text{ см}^2$

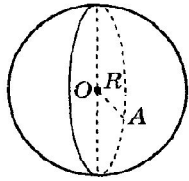
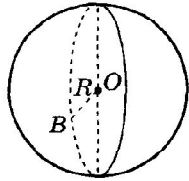
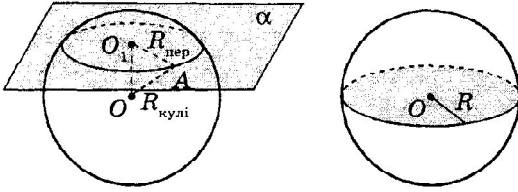
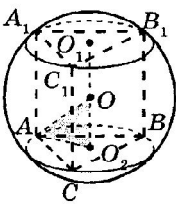
Розв'язання

За умовою задачі $l = 10$ см, $C = 2\pi R = 12\pi$ см, де l — твірна, C — довжина кола, R — радіус основи конуса. Тоді $S_{\text{бічн}} = \pi R l = \frac{2\pi R \cdot l}{2} = \frac{C \cdot l}{2} = \frac{12\pi \cdot 10}{2} = 60\pi \text{ (см}^2\text{)}.$

Відповідь: Б.

Опорний конспект лекції

Тема. Сфера та куля.

СФЕРА ТА КУЛЯ	
СФЕРА	
	O — центр сфери; OA — радіус сфери, $OA = R$ $S_{\text{сфери}} = 4\pi R^2$ Під час обертання півкола навколо його діаметра одержуємо сферу.
Сферою називають поверхню, яка складається з усіх точок простору, що розташовані на даній відстані (R) від даної точки (O).	
КУЛЯ	
	O — центр кулі; OB — радіус кулі, $OB = R$ $V_{\text{кулі}} = \frac{4}{3}\pi R^3$ Під час обертання півкруга навколо його діаметра одержуємо кулю.
Кулею називають тіло, що складається з усіх точок простору, що розташовані на відстані, не більшій за дану (R), від даної точки (O).	
ПЕРЕРІЗ КУЛІ ПЛОЩИНОЮ	
	Будь-який переріз кулі площиною є колом. Центр цього круга — основа перпендикуляра, опущеного з центра кулі на січну площину. O — центр кулі; O_1 — центр круга перерізу; $OO_1 \perp \alpha$. Із $\triangle OO_1A$: $AO_1 = R_{\text{пер}} = \sqrt{R_{\text{кулі}}^2 - OO_1^2}$ Переріз, що проходить через центр кулі, — великий круг. $R_{\text{вел. круга}} = R_{\text{кулі}}$
ВПИСАНІ Й ОПИСАНІ ПРИЗМИ	
КУЛЯ, ОПИСАНА НАВКОЛО ПРИЗМИ	
	Кулю називають описаною навколо призми, якщо всі вершини призми лежать на поверхні кулі. O — центр описаної кулі, $OA = OB = OC = OA_1 = OB_1 = OC_1 = R_{\text{опис. кулі}}$
1. Кулю можна описати тільки навколо такої прямої призми, навколо основи якої можна описати коло.	

2. Центр кулі, описаної навколо прямої призми, лежить на середині відрізка, який сполучає центри кіл, описаних навколо основ призми.

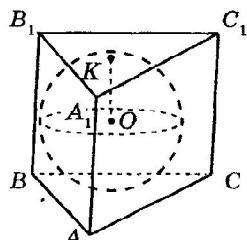
Якщо в призмі $ABCA_1B_1C_1$, O_2 — центр кола, описаного навколо основи ABC , O_1 — центр кола, описаного навколо основи $A_1B_1C_1$, O — середина відрізка O_1O_2 , то O — центр описаної кулі ($OA = OB = OC = OA_1 = OB_1 = OC_1 = R_{\text{опис. кулі}}$).

$$AO = R_{\text{опис. кулі}}$$

$$AO_2 = R_{\text{кола, опис. навк. основн}}$$

$$OO_2 = \frac{1}{2} AA_1 = \frac{1}{2} H_{\text{призми}}$$

КУЛЯ, ВПИСАНА В ПРИЗМУ



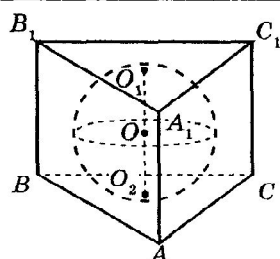
Кулю називають вписаною в призму, якщо всі грані призми дотикаються до цієї кулі.

O — центр вписаної кулі;

K — точка дотику до грані $A_1B_1C_1$

$$OK = r_{\text{опис. кулі}}, OK \perp \text{пл. } A_1B_1C_1$$

КУЛЯ, ВПИСАНА В ПРЯМУ ПРИЗМУ



$$r_{\text{впис. кулі}} = r_{\text{кола, впис. в основу}}$$

$$d_{\text{впис. кулі}} = H_{\text{призми}}$$

Центр кулі, вписаної в пряму призму, лежить на середині відрізка, який сполучає центри кіл, вписаних в основи призми. Причому радіус кулі дорівнює радіусу кола, вписаного в основу призми, а діаметр кулі дорівнює висоті призми.

Якщо $ABCA_1B_1C_1$ — пряма призма

і O_2 — центр кола, вписаного в основу ABC ;

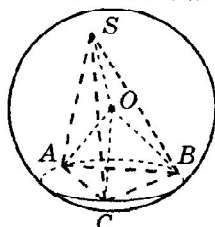
O_1 — центр кола, вписаного в основу $A_1B_1C_1$;

O — середина відрізка O_1O_2 ,

то O — центр вписаної кулі.

ВПИСАНІ Й ОПИСАНІ ПІРАМІДИ

КУЛЯ, ОПИСАНА НАВКОЛО ПІРАМІДИ

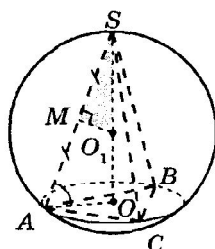


Кулю називають описаною навколо піраміди (а піраміду — вписаною в кулю), якщо всі вершини піраміди лежать на поверхні кулі.

O — центр описаної кулі

$$AO = BO = CO = SO = R_{\text{опис. кулі}}$$

ПІРАМІДА, У ЯКОЇ ОСНОВОЮ ВИСОТИ Є ЦЕНТР ОПИСАНОГО НАВКОЛО ОСНОВИ КОЛА



SO — висота піраміди $SABC$;

O — центр кола, описаного навколо основи піраміди;

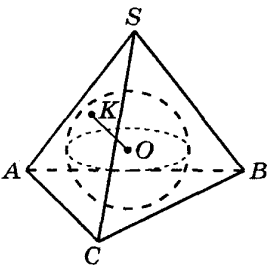
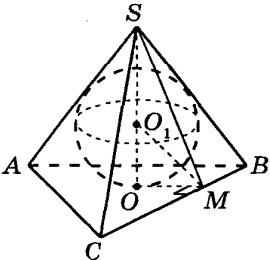
M — середина ребра SA ;

$MO_1 \perp SA$ (у площині ASO);

MO_1 перетинає пряму SO в точці O_1 ,

O_1 — центр описаної кулі

$$SO_1 = R_{\text{опис. кулі}}, AO = R_{\text{кола, опис. навк. основн}}$$

КУЛЯ, ВПИСАНА В ПІРАМІДУ	
	Кулю називають вписаною в піраміду (а піраміду — описаною навколо кулі), якщо всі грані піраміди дотикаються до цієї кулі. O — центр вписаної кулі; K — точка дотику кулі до грані SAC, $OK = r_{\text{опис. кулі}} \quad (OK \perp \text{пл. } SAC)$
ПІРАМІДА, У ЯКОЇ ОСНОВОЮ ВИСОТИ Є ЦЕНТР ВПИСАНОГО В ОСНОВУ КОЛА	
	SO — висота піраміди $SABC$; O — центр кола, вписаного в основу; $\angle SMO$ — лінійний ($OM \perp BC, SM \perp BC$); MO_1 — бісектриса $\angle SMO$; MO_1 перетинає SO в точці O_1, O_1 — центр вписаної кулі $OO_1 = r_{\text{опис. кулі}} \quad OM = r_{\text{кола, впис. в основу}}$

Завдання

Із циліндра виточено конус так, що його основа збігається з однією з основ циліндра, а вершина — із центром іншої основи циліндра (див. рисунок). Знайдіть відношення об'єму сточеної частини циліндра до об'єму конуса. [Т. 2009.]

А	Б	В	Г	Д
3 : 1	2 : 1	1 : 2	3 : 2	2 : 3

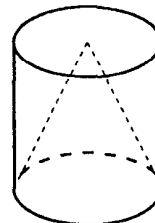
Розв'язання

Нехай R і H — радіус основи та висота конуса і циліндра.

Тоді $V_{\text{кон}} = \frac{1}{3}\pi R^2 H$, $V_{\text{цил}} = \pi R^2 H$. Відношення об'єму сточеної частини циліндра до об'єму конуса дорівнюватиме:

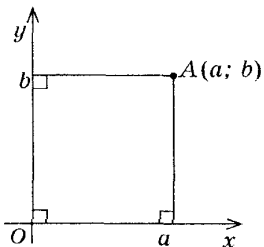
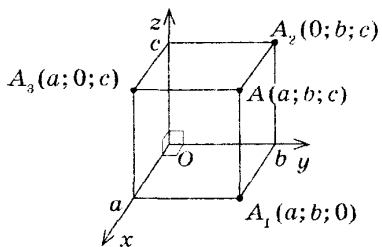
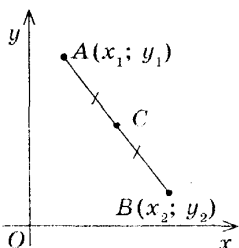
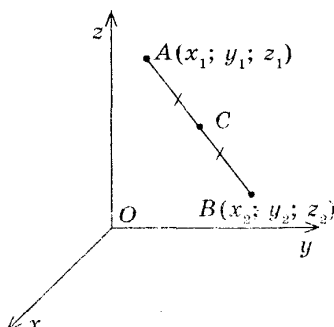
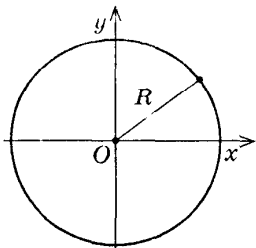
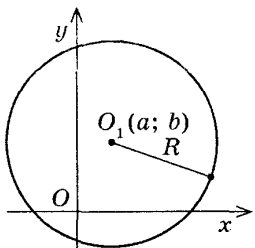
$$\frac{V_{\text{цил}} - V_{\text{кон}}}{V_{\text{кон}}} = \frac{\pi R^2 H - \frac{1}{3}\pi R^2 H}{\frac{1}{3}\pi R^2 H} = \frac{3\pi R^2 H - \pi R^2 H}{\pi R^2 H} = \frac{2\pi R^2 H}{\pi R^2 H} = 2 : 1.$$

Відповідь: Б.



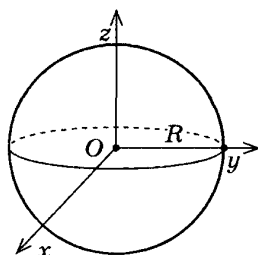
Опорний конспект лекції

Тема. Декартові координати. Вектори

ДЕКАРТОВІ КООРДИНАТИ	
ДЕКАРТОВІ КООРДИНАТИ	
НА ПЛОЩИНІ 	У ПРОСТОРІ 
КООРДИНАТИ СЕРЕДИНИ ВІДРІЗКА	
C — середина AB  $x_c = \frac{x_1 + x_2}{2}$ $y_c = \frac{y_1 + y_2}{2}$	C — середина AB  $x_c = \frac{x_1 + x_2}{2}$ $y_c = \frac{y_1 + y_2}{2}$ $z_c = \frac{z_1 + z_2}{2}$
ВІДСТАНЬ МІЖ ТОЧКАМИ	
$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$
РІВНЯННЯ КОЛА	
$x^2 + y^2 = R^2$  Центр кола — початок координат	$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$  Центр кола — точка $O_1(a; b)$

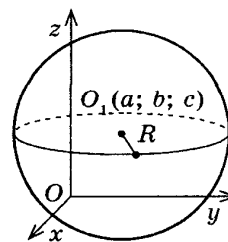
РІВНЯННЯ СФЕРИ

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$



Центр сфери — початок координат

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$



Центр сфери — точка $O_1(a; b; c)$

I. ЗАВДАННЯ З ВИБОРОМ ОДНІЄЇ ПРАВИЛЬНОЇ ВІДПОВІДІ

Скільки існує точок координатної площини, які лежать одночасно на відстані 7 від точки (1; 2) і на відстані 8 від точки (10; 14)? [Т. 2004.]

А	Б	В	Г	Д
0	1	2	3	Безліч

Розв'язання

Точки, віддалені від точки $O_1(1; 2)$ на відстань 7, — коло з центром $O_1(1; 2)$ і радіусом 7; точки, віддалені від точки $O_2(10; 14)$ на відстань 8, — коло з центром $O_2(10; 14)$ і радіусом 8. Знайдемо відстань між центрами цих кіл

$$O_1O_2 = \sqrt{(10 - 1)^2 + (14 - 2)^2} = \sqrt{81 + 144} = 15.$$

Оскільки сума радіусів кіл $7 + 8 = 15$ дорівнює відстані між центрами цих кіл, то кола дотикаються. Отже, маємо одну точку, яка задовольняє умову задачі.

Відповідь: Б.

II. ЗАВДАННЯ ВІДКРИТОЇ ФОРМИ З КОРОТКОЮ ВІДПОВІДДЮ

Дано точки $A(-8; -2)$, $B(-4; 3)$ і $C(-1; -3)$. Точка D належить прямій $y = 4$, $AD \perp BC$. Знайдіть координати точки D . [Т. 2003.]

Розв'язання

Оскільки шукана точка D лежить на прямій $y = 4$, то $D(x_0; 4)$.

Запишемо рівняння прямої BC :

$$\frac{x+1}{-4+1} = \frac{y+3}{3+3}; \quad 6(x+1) = -3(y+3); \quad 2x+2 = -y-3;$$

$$y = -2x - 5.$$

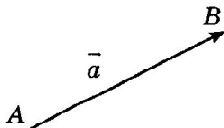
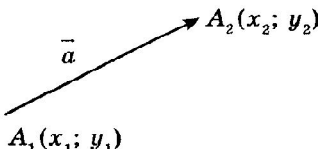
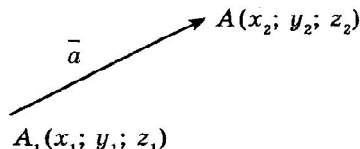
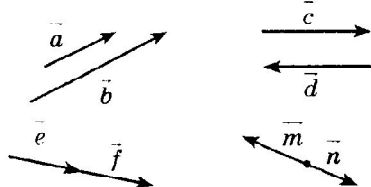
Запишемо рівняння прямої AD :

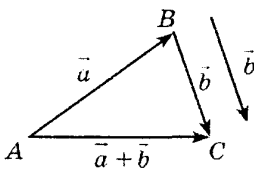
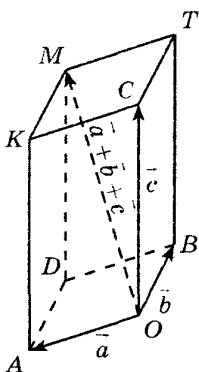
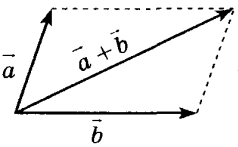
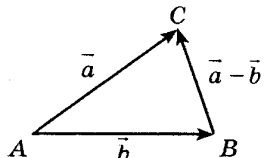
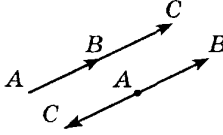
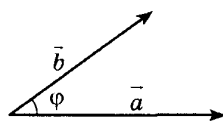
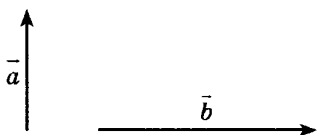
$$\frac{x+8}{x_0+8} = \frac{y+2}{4+2}; \quad 6(x+8) = (x_0+8)(y+2); \quad 6x+48 = x_0y+2x_0+8y+16;$$

$$x_0y+8y = 6x+32+2x_0; \quad y(x_0+8) = 6x+32+2x_0; \quad y = \frac{6}{x_0+8}x + \frac{32-2x_0}{x_0+8}.$$

Оскільки $BC \perp AD$, то $-2 \cdot \frac{6}{x_0+8} = -1$. Тоді $x_0+8 = 12$, $x_0 = -4$. Отже, $D(-4; 4)$.

Відповідь: $(-4; 4)$.

ВЕКТОРИ		
	$\overline{AB} = \overline{a}$ $ \overline{a} = AB$	Вектором називають напрямлений відрізок. Довжина напрямленого відрізка називається довжиною (модулем, абсолютною величиною) вектора.
КООРДИНАТИ ВЕКТОРА		
НА ПЛОЩИНІ	У ПРОСТОРІ	
 $ \overline{a} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ $\overline{a} (a_1; a_2)$, де $\begin{cases} a_1 = x_2 - x_1 \\ a_2 = y_2 - y_1 \end{cases}$	 $ \overline{a} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ $\overline{a} (a_1; a_2; a_3)$, де $\begin{cases} a_1 = x_2 - x_1 \\ a_2 = y_2 - y_1 \\ a_3 = z_2 - z_1 \end{cases}$	
РІВНІ ВЕКТОРИ		
	$\overline{a} = \overline{b} \Leftrightarrow \begin{cases} \overline{a} = \overline{b} , \\ \text{вектори } \overline{a} \text{ і } \overline{b} \text{ однаково напрямлені} \end{cases}$	
У КООРДИНАТАХ		
$\overline{a} (a_1; a_2) = \overline{b} (b_1; b_2) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1, \\ a_2 = b_2 \end{cases}$		$\overline{a} (a_1; a_2; a_3) = \overline{b} (b_1; b_2; b_3) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1, \\ a_2 = b_2, \\ a_3 = b_3 \end{cases}$
КОЛІНЕАРНІ ВЕКТОРИ		
	Ненульові вектори називають колінеарними, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих. Колінеарні вектори або однаково напрямлені, або протилежно напрямлені.	
$\overline{a} \text{ і } \overline{b} \text{ колінеарні} \Leftrightarrow \overline{b} = \lambda \overline{a} \Leftrightarrow \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3} \text{ (відповідні координати пропорційні)}$		
ОПЕРАЦІЇ НАД ВЕКТОРАМИ		
СУМА ВЕКТОРІВ		
НА ПЛОЩИНІ	У ПРОСТОРІ	
$\overline{a} (a_1; a_2) + \overline{b} (b_1; b_2) = \overline{c} (a_1 + b_1; a_2 + b_2)$	$\overline{a} (a_1; a_2; a_3) + \overline{b} (b_1; b_2; b_3) = \overline{c} (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$	

Правило трикутника  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$	Правило паралелепіпеда  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$
Правило паралелограма 	
РІЗНИЦЯ ВЕКТОРІВ	
$\vec{a} (a_1; a_2) - \vec{b} (b_1; b_2) = \vec{c} (a_1 - b_1; a_2 - b_2)$	$\vec{a} (a_1; a_2; a_3) - \vec{b} (b_1; b_2; b_3) = \vec{c} (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$
	$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$
МНОЖЕННЯ ВЕКТОРІВ НА ЧИСЛО	
$\lambda \cdot (a_1; a_2) = (\lambda a_1; \lambda a_2)$	$\lambda \cdot (a_1; a_2; a_3) = (\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3)$
 $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$	При $\lambda > 0$ вектор $\lambda \vec{a}$ і вектор $\vec{a}$ однаково напрямлені. При $\lambda < 0$ вектор $\lambda \vec{a}$ і вектор $\vec{a}$ протилежно напрямлені. $ \lambda \vec{a} = \lambda \cdot \vec{a} $
СКАЛЯРНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ	
	Скалярний добуток векторів дорівнює добутку їх довжин на косинус кута між ними. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \cos \varphi$
У КООРДИНАТАХ	
На площині $\vec{a} (a_1; a_2); \vec{b} (b_1; b_2)$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$	У просторі $\vec{a} (a_1; a_2; a_3); \vec{b} (b_1; b_2; b_3)$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$
Скалярний добуток векторів дорівнює сумі добутків однойменних координат.	
	При $\vec{a} \neq \vec{0}$ і $\vec{b} \neq \vec{0}$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

I. ЗАВДАННЯ З ВИБОРОМ ОДНІЄЇ ПРАВИЛЬНОЇ ВІДПОВІДІ

Знайдіть довжину вектора $\vec{a}$ (6; y), якщо відомо, що він колінеарний вектору $\vec{b} + \vec{c}$, де $\vec{b}$ (-2; 0), $\vec{c}$ (0; 1). [Т. 2007.]

А	Б	В	Г	Д
7	$4\sqrt{3}$	$5\sqrt{3}$	$3\sqrt{5}$	6

Розв'язання

$$\vec{b} + \vec{c} = \vec{d}, \quad \vec{d}(-2 + 0; 0 + 1) = \vec{d}(-2; 1).$$

Оскільки $\vec{a}$ (6; y) колінеарний вектору $\vec{d}$ (-2; 1), то $\frac{6}{-2} = \frac{y}{1}$, звідси $y = -3$. Тоді $\vec{a}$ (6; -3),
 $|\vec{a}| = \sqrt{6^2 + (-3)^2} = \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.

Відповідь: Г.

II. ЗАВДАННЯ ВІДКРИТОЇ ФОРМИ З КОРОТКОЮ ВІДПОВІДДЮ

Визначте кут (у градусах) між векторами $\vec{a} - \vec{b}$ і $\vec{c}$, якщо відомо, що $\vec{a}$ (3; 5; -4), $\vec{b}$ (-2; 5; -4) і $\vec{c}$ (0; 0; 2). [Т. 2008.]

Розв'язання

Оскільки $\vec{a}$ (3; 5; -4), $\vec{b}$ (-2; 5; -4) і $\vec{a} - \vec{b} = \vec{d}$, то $\vec{d}$ (3 + 2; 5 - 5; -4 + 4) = $\vec{d}$ (5; 0; 0).

Тоді $\cos \varphi = \frac{\vec{d} \cdot \vec{c}}{|\vec{d}| \cdot |\vec{c}|}$, де φ — кут між векторами $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ і $\vec{c}$.

$$\text{Звідси } \cos \varphi = \frac{5 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 2}{\sqrt{5^2 + 0^2 + 0^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 2^2}} = \frac{0}{5 \cdot 2} = \frac{0}{10} = 0.$$

Оскільки $\cos \varphi = 0$, то $\varphi = 90^\circ$.

Відповідь: 90° .